

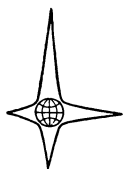
БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МЕХАНИКА

Д.Бленг



**еория
линейной
вязко-упругости**



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

**THE THEORY OF
LINEAR VISCOELASTICITY**

by

D. R. BLAND

Lecturer in Mathematics,
University of Manchester

PERGAMON PRESS

OXFORD. LONDON. NEW YORK. PARIS

1960

Д. Бленд

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ

Перевод с английского

И. И. ГОЛЬБЕРГА и Н. И. МАЛИНИНА

Под редакцией

Э. И. ГРИГОЛЮКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1965

Линейная теория вязко-упругих сред в настоящее время имеет большое практическое значение в связи с широким применением полимеров и пластмасс, поведение которых часто описывается вязко-линейной моделью. В небольшой монографии английского ученого излагается теория линейных вязко-упругих сред с бесконечным спектром релаксации. Анализируется распространение волн и дается решение ряда квазистатических задач. Рассматривается возможность надлежащего подбора вязко-упругой модели по данным экспериментов.

В данное издание в качестве приложения включен перевод статьи Е. Ли „Напряжения в вязко-упругом теле“.

Книга представит интерес для научных работников и инженеров, занимающихся вопросами теории упругости и пластичности. Она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам университетов и технических вузов, изучающим свойства синтетических материалов и вопросы их применения.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В последнее время в связи с широким применением полимеров возник особенный теоретический и практический интерес к вопросам вязко-упругого поведения сплошных сред. Частный случай вязко-упругой среды, поведение которой описывается законом Гука или законом Ньютона, был предметом тщательного изучения ученых предыдущего и текущего столетий.

Так, идеально-упругие твердые тела исследуются в теории упругости; в этом случае компоненты напряжения в некоторой точке тела пропорциональны компонентам деформации в той же точке и не проявляют зависимости от компонентов скорости деформации.

Идеально-вязкие жидкие тела изучаются в гидродинамике; для этих тел компоненты напряжения в некоторой точке пропорциональны компонентам скоростей деформации в той же точке и не зависят от компонент деформации.

Тела, для которых напряжения определяются деформациями и скоростями деформации (или более высокими производными по времени от деформации), характеризуют процесс деформации как идеально-упругого, так и идеально-вязкого тела, поэтому они получили название вязко-упругих тел. Когда между компонентами напряжения, деформации и скоростей деформации существует линейная зависимость, то тело проявляет линейное вязко-упругое поведение.

Изучению таких тел посвящена книга Бленда, перевод которой предлагается советскому читателю. В книге в сжатой и ясной форме изложены основные результаты, установленные в теории линейных вязко-упругих твердых

тел; в ней обсуждаются различные модели тел, дается сопоставление данных эксперимента и расчета для ряда типов моделей вязко-упругого тела.

Ссылки на библиографические источники в подлиннике носят в известной мере случайный характер, отражая, по-видимому, личные чувства и симпатии автора. Однако в данной книге, рассчитанной на первоначальное ознакомление читателя с предметом, дополнять приводимые автором перечни литературы представляется нецелесообразным.

В качестве приложения к книге прилагается перевод статьи Е. Ли „Напряжения в вязко-упругом теле“, носящей обзорный характер.

Перевод книги выполнен И. И. Гольбергом. Статья Е. Ли переведена Н. И. Малининым.

Э. И. Григолюк

МОДЕЛИ. ВВЕДЕНИЕ В ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ

1. Уравнения, определяющие зависимость между силой и удлинением для простых моделей

Вязко-упругость, как показывает сам термин, это обобщение понятий упругости и вязкости. Идеальным линейным упругим элементом является пружина. Когда к пружине приложена растягивающая сила, расстояние между ее концами увеличивается пропорционально этой силе. Примером идеального линейного вязкого элемента



Рис. 1. Упругий элемент, пружина



Рис. 2. Вязкий элемент, амортизатор

служит амортизатор. Это может быть цилиндр, заполненный жидкостью, внутри которого свободно перемещается поршень так, что жидкость протекает в зазоре между цилиндром и поршнем. Сила, приложенная к амортизатору, вызывает перемещение поршня относительно цилиндра со скоростью, пропорциональной силе. Оба элемента показаны схематически на рис. 1 и 2.

Если F — сила и a — удлинение, т. е. прирост расстояния между концами пружины, то

$$F = Ea, \quad (1)$$

где E — постоянная, называемая модулем пружины. Для амортизатора зависимость между силой и удлинением

имеет вид

$$F = \eta Da, \quad (2)$$

где оператор D обозначает дифференцирование по времени, а постоянная η является постоянной, известной как коэффициент вязкости амортизатора.

В вязко-упругости рассматриваются комбинации упругих и вязких элементов. В этой главе будут рассмотрены только одномерные системы, все элементы которых одинаково направлены и все силы действуют в том же направлении. В данном разделе рассматриваются некоторые простейшие комбинации основных элементов.

Элементы могут быть последовательно соединены. Такая комбинация известна как *элемент Максвелла*; он показан на рис. 3. Предположим, что к этому элементу приложена растягивающая сила, и найдем зависимость между силой F и удлинением a . Сила F одинакова для упругого и вязкого элементов, и удлинение a равно сумме удлинений этих элементов, следовательно,

$$a = a_{AB} = a_{AC} + a_{CB}, \quad (3)$$

где C обозначает точку соединения пружины и амортизатора. Удлинение пружины a_{AC} определяется уравнением (1), величина Da_{CB} — формулой (2), а величины a_{AB} и a_{CB} находятся путем исключения из уравнений (1) — (3). Дифференцируя уравнение (3), получаем

$$Da = Da_{AC} + Da_{CB}.$$

Подстановка значений Da_{AC} и Da_{CB} и уравнений (1) и (2) дает уравнение

$$Da = \frac{1}{E} DF + \frac{1}{\eta} F. \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет искомую зависимость между удлинением a и силой F .

Комбинация упругого и вязкого элементов, соединенных параллельно, называется *элементом Фойгта* (иногда элементом Кельвина или элементом Кельвина — Фойгта), он показан схематически на рис. 4. Удлинения a в пружине и амортизаторе одинаковы. Пусть сила, растягивающая пружину, равна F_S , а сила, растягивающая амор-

тизатор, равна F_D ; тогда

$$F = F_S + F_D. \quad (5)$$

Подстановка значений F_S и F_D из уравнений (1) и (2) дает зависимость между силой и удлинением для элемента Фойгта

$$F = Ea + \eta Da. \quad (6)$$

Если в уравнении (4) модуль E обращается в бесконечность, то это уравнение переходит в уравнение (2);

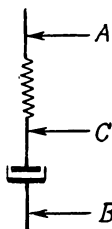


Рис. 3. Элемент Максвелла

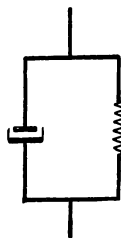


Рис. 4. Элемент Фойгта

если коэффициент вязкости η обращается в бесконечность, то уравнение (4) тождественно уравнению (1). Если модуль E равен нулю, то уравнение (6) совпадает с уравнением (2), а при коэффициенте η , равном нулю, уравнение (6) эквивалентно уравнению (1). В этих частных случаях элементы Максвелла и Фойгта вырождаются в простейшие элементы.

Из двух пружин и одного амортизатора можно сделать две невырожденные¹⁾ модели²⁾. Они показаны на рис. 5.

¹⁾ Две пружины, соединенные последовательно или параллельно, могут быть заменены одной пружиной, при этом характер механического поведения конструкции в целом не изменится. Термин „невырожденная модель“ исключает указанную возможность уменьшения числа элементов, составляющих модель. Эти же замечания справедливы для двух амортизаторов, соединенных последовательно или параллельно.

²⁾ Термин „модель“ применяется для конструкции, состоящей более чем из двух простых элементов.

Левая модель на рис. 5 состоит из последовательно соединенных упругого элемента и элемента Фойгта. Одна

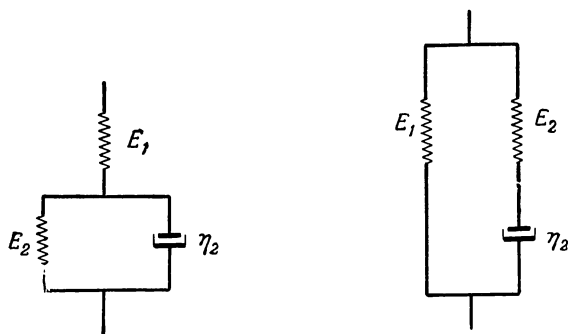


Рис. 5. Различные схемы трехэлементной упругой модели

и та же сила F приложена к каждому элементу, и удлинение a равно сумме удлинений a_1 и a_2 этих элементов, т. е.

$$a = a_1 + a_2.$$

Из уравнения (1) имеем

$$F = E_1 a_1,$$

а уравнение (6) дает

$$F = E_2 a_2 + \eta_2 D a_2.$$

Исключая a_1 и a_2 , получаем

$$DF + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2} F = E_1 D a + \frac{E_1 E_2}{\eta_2} a. \quad (7)$$

Так как уравнение не изменяется при умножении на не равную нулю постоянную, то коэффициент при высшей производной от F можно принять равным единице.

Правая модель на рис. 5 состоит из упругого элемента и элемента Максвелла, соединенных параллельно. Читателю для упражнения предлагается самому показать, что зависимость между силой и удлинением для этой модели определяется уравнением

$$DF + \frac{E'_2}{\eta_2} F = (E'_1 + E'_2) D a + \frac{E'_1 E'_2}{\eta_2} a. \quad (8)$$

Таким образом, данному соотношению между силой и удлинением, имеющему вид

$$DF + p_0 F = q_1 Da + q_0 a, \quad (9)$$

соответствуют две различные модели. Постоянные, характеризующие упругость и вязкость одной модели, находятся

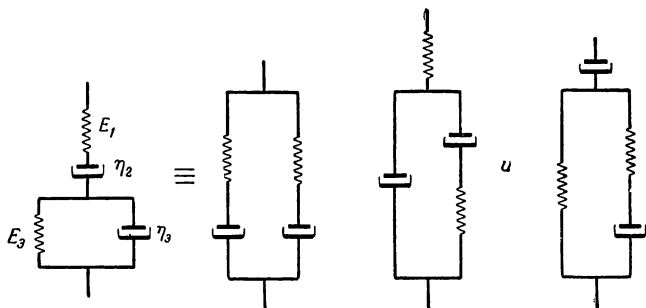


Рис. 6. Четырехэлементная модель первого типа и ее эквивалентные схемы

сравнением коэффициентов уравнения (7) с соответствующими коэффициентами уравнения (9), а другой модели — сравнением коэффициентов уравнений (8) и (9). Две системы постоянных не одинаковы. Действительно, когда зависимости между силой и удлинением соответствует невырождающаяся модель, содержащая более двух элементов, эта модель не будет единственной.

Читатель сможет теперь показать, что возможно сконструировать две невырождающиеся модели из двух амортизаторов и одной пружины. Каждая из этих моделей называется трехэлементной вязкой моделью. Уравнение, определяющее форму связи между силой и удлинением, в этом случае имеет вид

$$DF + p_0 F = q_2 D^2 a + q_1 Da.$$

На рис. 6 показаны три схемы, эквивалентные часто применяемой четырехэлементной модели. Используем очевидное обозначение

$$a = a_1 + a_2 + a_3.$$

Из уравнения (1) имеем

$$F = E_1 a_1,$$

а уравнение (2) дает

$$F = \eta_2 D a_2.$$

Из уравнения (6) получаем

$$F = E_3 a_3 + \eta_3 D a_3.$$

Исключая a_1 , a_2 и a_3 , получаем зависимость между силой и удлинением для четырехэлементной модели первого типа

$$D^2 F + \left(\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_3} + \frac{E_3}{\eta_3} \right) D F + \frac{E_1 E_3}{\eta_2 \eta_3} F = E_1 D^2 a + \frac{E_1 E_3}{\eta_3} D a. \quad (10)$$

2. Ползучесть и релаксация

Испытание на ползучесть состоит в том, что к первоначально ненагруженной модели прикладывается сила, которая остается далее постоянной, и измеряется изменение удлинения во времени. Испытание на релаксацию сводится к тому, что модели дается постоянное удлинение и измеряется во времени сила, необходимая для того, чтобы удлинение оставалось постоянным.

Ползучесть можно описать математически следующим образом: дана сила $F = CH(t)$ и зависимость между силой F и удлинением a , нужно найти a . Здесь C — постоянная, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда¹⁾.

Для упругого элемента зависимость между силой F и удлинением $a(t)$ определяется уравнением (1) и, таким образом,

$$a(t) = \frac{1}{E} F(t) = \frac{C}{E} H(t).$$

Для вязкого элемента формула (2) дает

$$D a(t) = \frac{C}{\eta} H(t).$$

¹⁾ Единичной функцией Хевисайда называется ступенчатая функция, определяемая условием

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$a(t) = \frac{C}{\eta} t H(t),$$

так как при $t=0$ $a=0$. Для элемента Максвелла уравнение (4) дает

$$Da = \frac{C}{E} \delta(t) + \frac{C}{\eta} H(t),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака¹⁾. Интегрируя, получаем

$$a(t) = C \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) H(t), \quad (11)$$

так как $a=0$ при $t=0$. Для элемента Фойгта из уравнения (6) имеем

$$Ea + \eta Da = CH(t).$$

Умножение на интегрирующий множитель $\exp \{(E/\eta)t\}$ дает

$$\eta D \left[\exp \left(\frac{E}{\eta} t \right) a \right] = C \exp \left(\frac{E}{\eta} t \right) H(t).$$

После интегрирования получаем

$$a(t) = \frac{C}{E} \left[1 - \exp \left(-\frac{E}{\eta} t \right) \right] H(t), \quad (12)$$

так как $a=0$ при $t=0$. Различные виды сопротивления удлинению показаны на рис. 7.

В двух элементах, соединенных последовательно, напряжения равны и удлинение равно сумме удлинений каждого элемента. Так как элемент Максвелла состоит из

¹⁾ Дельта-функция Дирака определяется следующими условиями:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{для } t \neq 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Единичная функция Хевисайда и дельта-функция связаны уравнением

$$\delta(t) = DH(t).$$

— Прим. перев.

двух последовательно соединенных элементов, его удлинение равно сумме удлинений упругого и вязкого элементов. Это свойство поведения при удлинении последовательно соединенных элементов может быть использовано

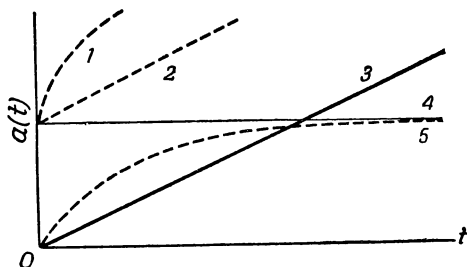


Рис. 7. Сопротивление удлинению под действием единичной силы $H(t)$ различных элементов: четырехэлементной модели первого типа (1), Максвелла (2), вязкого (3), упругого (4), Фойгта (5)

для определения удлинения более сложных моделей. Например, четырехэлементная модель, показанная на рис. 6, состоит из элементов Максвелла и Фойгта, соединенных

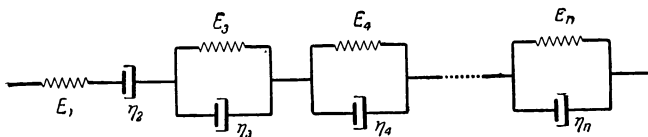


Рис. 8. Обобщенная модель Фойгта

последовательно. Удлинение этой модели получаем, следовательно, с помощью уравнений (11) и (12) в виде

$$a(t) = C \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_2} t \right) H(t) + \frac{C}{E_3} \left[1 - \exp \left(-\frac{E_3}{\eta_3} t \right) \right] H(t).$$

Кривая сопротивления растяжению, соответствующая этому уравнению, построена на рис. 7.

Рассмотрим модель, состоящую из пружины, амортизатора и большого числа элементов Фойгта, соединенных

последовательно. Такая модель называется *обобщенной моделью Фойгта*, она показана на рис. 8.

Удлинение этой модели подчиняется зависимости

$$a(t) = C \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_2} t \right) H(t) + C \sum_{r=3}^n \frac{1}{E_r} \left[1 - \exp \left(-\frac{E_r}{\eta_r} t \right) \right] H(t).$$

Функция, определяющая удлинение, вызванное приложением единичной силы $H(t)$, представляется достаточно важной в задачах вязко-упругости и получила поэтому специальное название. Если из общего удлинения, вызванного приложением единичной силы $H(t)$, вычесть мгновенное упругое удлинение и удлинение, соответствующее установившемуся вязкому течению, то оставшаяся часть общего удлинения называется *функцией ползучести* и обозначается через $\psi(t)$. Следовательно, для обобщенной модели Фойгта функция ползучести имеет вид¹⁾

$$\psi(t) = \sum_{r=3}^n \frac{1}{E_r} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{E_r}{\eta_r} t \right) \right\} H(t). \quad (13)$$

Из уравнения (12) видно, что время τ , необходимое для того, чтобы функция ползучести для элемента Фойгта достигла значения $1 - 1/e$, равно

$$\tau = \frac{\eta}{E}.$$

Время τ называется *временем запаздывания* для элемента Фойгта. Величина, обратная модулю пружины, называется *податливостью* и обозначается через J , причем

$$J = \frac{1}{E}.$$

Уравнение (12) теперь можно написать в виде

$$\psi(t) = J \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) H(t). \quad (14)$$

¹⁾ Отсюда следует, что ползучесть вязко-упругих материалов является обратимой упругой деформацией в отличие от теории ползучести металлов, где деформация ползучести считается обычно необратимой. — *Прим. перев.*

Подобным же образом, полагая

$$\tau_r = \frac{\eta_r}{E_r} \quad \text{и} \quad J_r = \frac{1}{E_r},$$

уравнение (13) можно написать в виде

$$\psi(t) = \sum_{r=3}^n J_r \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}} \right) H(t). \quad (15)$$

Отсюда следует, что обобщенная модель Фойгта имеет дискретный спектр времен запаздывания τ_r . Податливость J_r определяет для функции ползучести величину членов, соответствующих каждому значению τ_r .

Некоторые авторы включают члены $J_1 H(t)$ и $\frac{1}{\eta_2} t H(t)$ в функцию ползучести $\psi(t)$. Этим членам соответствуют значения $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = \infty$. Так как при $\tau_2 \rightarrow \infty$ имеем $E_2 \rightarrow 0$, то в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_2} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{E_2}{\eta_2} t \right) \right\} &= \\ &= \frac{1}{E_2} \left(\frac{E_2}{\eta_2} t - \frac{1}{2!} \left(\frac{E_2}{\eta_2} t \right)^2 + \dots \right) \rightarrow \frac{1}{\eta_2} t. \end{aligned}$$

Краткое исследование формы функции ползучести для некоторых частных случаев, встречающихся в данной книге, покажет, какую из двух форм применяет автор.

Если число элементов Фойгта в обобщенной модели неограниченно возрастает таким образом, что $J_r \rightarrow 0$ для всех r , но сумма $\sum_{r=3}^n J_r$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к постоянной, большей нуля, то функция ползучести принимает вид

$$\psi(t) = H(t) \int_0^{\infty} j(\tau) \{ 1 - \exp(-t/\tau) \} d\tau, \quad (16)$$

здесь $j(\tau)$ называется *функцией распределения времен запаздывания*, или, более кратко, *спектром запаздывания*.

Можно рассмотреть модель, которая имеет оба спектра запаздывания: дискретный и непрерывный. Например, новую

модель можно сделать, соединив последовательно модель с дискретным спектром и модель с непрерывным спектром. В этом случае функцию ползучести можно представить интегралом Стильбеса

$$\psi(t) = H(t) \int_0^{\infty} \{1 - \exp(-t/\tau)\} d\alpha(\tau), \quad (17)$$

где $\alpha(\tau)$ возрастающая функция от τ , которая имеет производную везде, за исключением конечного числа точек. Во всех точках, за исключением этого конечного числа, подинтегральное выражение имеет такую же форму, как в уравнении (16), а в других точках оно дает члены в форме, которая следует из уравнения (15).

Рассмотрим теперь опыты на релаксацию. Релаксацию можно описать математически следующим образом: даны удлинение $a = KH(t)$ и зависимость между силой F и удлинением a , нужно найти силу F . Здесь K — постоянная. Найдем теперь силу F для простых моделей.

Для упругого элемента из уравнения (1) получим

$$F(t) = Ea(t) = KEH(t).$$

Для вязкого элемента из уравнения (2) имеем

$$F(t) = \eta Da(t) = K\eta\dot{H}(t).$$

Для элемента Максвелла, согласно уравнению (4), найдем

$$F(t) = KE \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) H(t), \quad (18)$$

а для элемента Фойгта уравнение (6) дает

$$F(t) = KEH(t) + K\eta\dot{H}(t). \quad (19)$$

Два из полученных уравнений для силы содержат дельта-функцию; это значит, что напряжение становится бесконечным в момент возникновения деформации. Амортизатор в отличие от пружины не может дать конечное мгновенное удлинение, отвечающее конечному мгновенному изменению силы. Следовательно, если конечное мгновенное удлинение сообщено амортизатору, то оно требует бесконечного значения силы. Для моделей, содержащих более одного элемента, конечное мгновенное удлинение может

быть произведено конечной силой только в случае, если имеется одна или более пружин, которые могут свободно сжиматься или растягиваться без одновременного укорочения или удлинения амортизатора. Например, пружина в элементе Максвелла свободна, а в элементе Фойгта несвободна. Поэтому выражение (18) не содержит δ -функцию, а формула (19) ее включает. Модели, которая отвечает мгновенным изменениям силы на мгновенное конечное изменение удлинения, свойственна мгновенная упругость.

Если вернуться к удлинению при ползучести, то можно заметить, что при $t \rightarrow \infty$ удлинение $a(t)$ стремится к бесконечности как линейная функция от t , т. е.

$$a(t) = O(t) \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{\frac{Ct}{\eta_2}} = 1.$$

В этом случае амортизатор, не ограниченный какой-либо пружиной, свободно деформируется („течет“), и модель описывает так называемое *установившееся вязкое течение*. За счет свободного амортизатора элемент Максвелла имеет установившееся вязкое течение. Упругий элемент и элемент Фойгта, очевидно, не имеют установившегося вязкого течения. Если модель имеет амортизатор, не ограниченный пружиной, то при релаксации амортизатор будет принимать на себя все растяжение и в пределе сила будет убывать до нуля. Читатель может проверить по приведенным выше выражениям для силы $F(t)$, что сила в пределе стремится к нулю для вязкого элемента и элемента Максвелла. Наоборот, при релаксации упругого элемента и элемента Фойгта сила не стремится к нулю.

Если модели соединены последовательно и приложена постоянная сила, то общее удлинение при ползучести равно сумме удлинений каждой модели. Подобным же образом, если модели соединены параллельно и приложено постоянное удлинение, то общая сила при релаксации равна сумме сил, приложенных к каждой модели. Например, релаксация силы для элемента Фойгта равна сумме сил, определенных при релаксации упругого и вязкого элементов,

Рассмотрим модель, состоящую из параллельно соединенных амортизатора, пружины и большого числа элементов Максвелла, показанную на рис. 9. Изменение силы

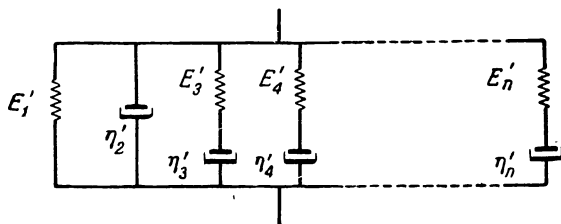


Рис. 9. Обобщенная модель Максвелла

при релаксации такой модели определяется уравнением

$$F(t) = KE'_1 H(t) + K\eta'_2 \delta(t) + K \sum_{r=3}^n E'_r \exp\left(-\frac{E'_r}{\eta'_r} t\right) H(t).$$

При действии единичного удлинения $a(t) = H(t)$ изменение силы без учета первых двух слагаемых называется *функцией релаксации* и обозначается посредством $\chi(t)$. Таким образом, для обобщенной модели Максвелла имеем

$$\chi(t) = \sum_{r=3}^n E'_r \exp\left(-\frac{E'_r}{\eta'_r} t\right). \quad (20)$$

Если времена релаксации обозначить через

$$\tau'_r = \eta'_r / E'_r,$$

то

$$\chi(t) = \sum_{r=3}^n E'_r \exp(-t/\tau'_r) H(t). \quad (21)$$

Следовательно, обобщенная модель Максвелла имеет дискретный спектр времен релаксации τ'_r . Значения упругости E'_r определяют в функции релаксации величину членов, соответствующих каждому значению τ'_r .

Некоторые авторы включают члены $E'_1 H(t) + \eta'_2 \delta(t)$ в функцию релаксации. Член $E'_1 H(t)$ соответствует времени

$\tau'_1 = \infty$, т. е. $\eta'_1 = \infty$; член $\eta'_2 \delta(t)$ соответствует времени $\tau'_2 = 0$, т. е. $E'_2 = 0$ ¹⁾.

Если число элементов Максвелла в обобщенной модели неограниченно возрастает таким образом, что $E'_r \rightarrow 0$, но сумма $\sum_{r=s}^n E_r$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к положительной постоянной, то функция релаксации принимает вид

$$\chi(t) = H(t) \int_0^{\infty} y(\tau) \exp(-t/\tau) d\tau. \quad (22)$$

Здесь $y(\tau)$ называется *функцией распределения времен релаксации*, или, более кратко, *спектром релаксации*. Функцию релаксации для модели, которая имеет дискретный и непрерывный спектры времен релаксации, можно представить интегралом Стилтеса в форме

$$\chi(t) = H(t) \int_0^{\infty} \exp(-t/\tau) d\beta(\tau), \quad (23)$$

¹⁾ Доказательство: для всех значений t , отличных от $t=0$, имеем

$$\lim_{E \rightarrow \infty} E \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) H(t) = 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) H(t) dt &= \left[-\eta \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) H(t)\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \\ &+ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) \delta(t) dt = -\eta \exp\left(-\frac{E\varepsilon}{\eta}\right) + \eta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) H(t) dt = \eta.$$

Таким образом, согласно определению дельта-функции, имеем

$$\lim_{E \rightarrow \infty} E \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) H(t) = \eta \delta(t).$$

где $\beta(\tau)$ — возрастающая функция, которая имеет производную везде, за исключением конечного числа точек.

3. Комплексный модуль и комплексная податливость

Пусть к модели приложена синусоидально изменяющаяся сила с угловой частотой ω . После истечения времени, достаточного для того, чтобы начальными условиями можно было пренебречь, удлинение также приобретает угловую частоту ω . Если $\text{Re}[z]$ обозначает действительную часть z , то для синусоидальных колебаний сила и удлинение определяются уравнениями

$$F = \text{Re}[F^0(\omega) \exp(i\omega t)] \quad (24)$$

и

$$a = \text{Re}[a^0(\omega) \exp(i\omega t)], \quad (25)$$

где $F^0(\omega)$ и $a^0(\omega)$ не зависят от t и в общем случае имеют комплексные значения.

Когда моделью служит пружина, подстановка значений F и a , согласно выражениям (24) и (25), в соотношение (1) дает

$$\text{Re}[F^0(\omega) \exp(i\omega t)] = E \text{Re}[a^0(\omega) \exp(i\omega t)].$$

В этом равенстве, справедливом для любого времени t , принято обозначение

$$\frac{F^0(\omega)}{a^0(\omega)} = E.$$

В данном случае отношение $F^0(\omega)/a^0(\omega)$ равно модулю пружины. Когда моделью служит амортизатор, подстановка значений F и a по формулам (24) и (25) в зависимости (2) приводит к соотношению

$$\text{Re}[F^0(\omega) \exp(i\omega t)] = \eta \text{Re}[a^0(\omega) i\omega \exp(i\omega t)],$$

и, следовательно,

$$\frac{F^0(\omega)}{a^0(\omega)} = i\omega\eta.$$

Подобным же образом для моделей Максвелла и Фойгта получим

$$\frac{F^0(\omega)}{a^0(\omega)} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta} \right)^{-1}$$

и соответственно

$$\frac{F^0(\omega)}{a^0(\omega)} = E + i\omega\eta.$$

Отношение $F_0(\omega)/a^0(\omega)$ для частной модели называется *комплексным модулем* этой модели и обозначается через $Y(i\omega)$. Из выражений (24) и (25) видно, что отношение имеет величину, равную отношению амплитуды напряжения к амплитуде деформации, а аргумент равен отставанию фазы деформации от напряжения. Величина, обратная комплексному модулю, называется *комплексной податливостью* и обозначается через $J(i\omega)$. Комплексный модуль и комплексная податливость являются функциями угловой частоты ω .

Если две модели M' и M'' соединены последовательно, то силы, приложенные к моделям, равны, а удлинение комбинации моделей равно сумме отдельных удлинений. Обозначим комплексные податливости двух моделей соответственно через $J'(i\omega)$ и $J''(i\omega)$, а комплексную податливость комбинации посредством $J(i\omega)$. Тогда

$$J(i\omega) = \frac{a^0}{F^0} = \frac{a^{0'} + a^{0''}}{F^0} = J'(i\omega) + J''(i\omega). \quad (26)$$

Этот результат легко обобщить, показав, что комплексная податливость нескольких моделей, соединенных последовательно, равна сумме их комплексных податливостей. В частности, комплексная податливость обобщенной модели Фойгта, показанной на рис. 8, равна

$$J(i\omega) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{i\omega\eta_2} + \sum_{r=3}^n \frac{1}{E_r + i\omega\eta_r}. \quad (27)$$

Если две модели M' и M'' соединены параллельно, то удлинения моделей равны, а сила, приложенная к комбинации моделей, равна сумме отдельных сил. Обозначив комплексные модули моделей и их комбинации соответ-

ственно через $Y'(i\omega)$, $Y''(i\omega)$ и $Y(i\omega)$, получим

$$Y(i\omega) = \frac{F^0}{a^0} = \frac{F^{0'} + F^{0''}}{a^0} = Y'(i\omega) + Y''(i\omega). \quad (28)$$

Следовательно, комплексный модуль нескольких моделей, соединенных параллельно, равен сумме их комплексных модулей. В частности, комплексный модуль обобщенной модели Максвелла, показанной на рис. 9, равен

$$Y(i\omega) = E_1' + i\omega\eta_2' + \sum_{r=3}^n \left(\frac{1}{E_r'} + \frac{1}{i\omega\eta_r'} \right)^{-1}. \quad (29)$$

4. Накопленная и рассеянная энергии

В пружинах энергия накапливается как энергия упругой деформации, а в амортизаторах энергия рассеивается в виде тепла. В пружине энергия не рассеивается, а в амортизаторе энергия не накапливается. Следовательно, суммарная энергия V , накопленная в модели, равна сумме энергий, накопленных в составляющих ее пружинах, а суммарная скорость рассеивания энергии в модели ϕ равна сумме скоростей рассеивания в составляющих ее амортизаторах. Так как энергия, накопленная в пружине, равна

$$\frac{1}{2} E a^2 = \frac{1}{2E} F^2 = \frac{1}{2} F a,$$

а скорость рассеивания энергии в амортизаторе составляет $\eta(Da)^2 = (1/\eta) F^2 = F D a$, то

$$V = \frac{1}{2} \sum_i E_i a_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i F_i^2 / E_i = \frac{1}{2} \sum_i F_i a_i \quad (30)$$

и

$$\phi = \sum_i \eta_i (D a_i)^2 = \sum_i \frac{1}{\eta_i} F_i^2 = \sum_i F_i D a_i, \quad (31)$$

где суммы в V и ϕ берутся соответственно по всем пружинам и амортизаторам в модели,

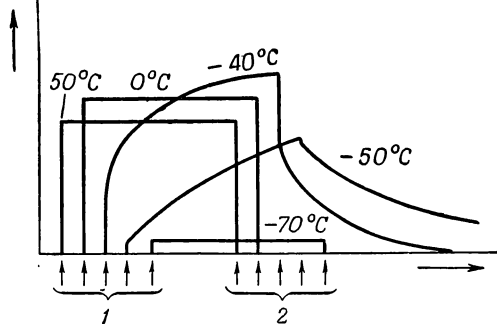
5. Ползучесть и релаксация некоторых реальных материалов

При испытании на ползучесть реального материала внешние силы, дающие простое распределение напряжения в материале, прикладываются в некоторый момент времени, выдерживаются постоянными в течение длительного периода и затем снимаются. Перемещения измеряются в различное время, и по известным силам и перемещениям вычисляются компоненты напряжения и деформации. Типичные результаты испытаний на ползучесть показаны на рис. 10 (см. [1]) и на рис. 11 (см. [2]). Типичные результаты испытаний на релаксацию показаны на рис. 12 (см. [3]).

Как можно видеть из рис. 10, резина при 50°C , 0°C и -70°C ведет себя подобно чисто упругому материалу, но при -40°C и -50°C характеризуется сначала мгновенной упругой деформацией, затем деформация ее непрерывно возрастает. При -40°C деформация стремится к предельной величине; при -50°C испытания не были достаточно длительными, чтобы можно было судить о том, имеется ли предельное значение. Механическое поведение при -40°C может быть моделировано обобщенной моделью Фойгта, но без последовательно присоединенного амортизатора. Подобным же образом из рис. 11 заключаем, что поведение нитроцеллюлозы при ползучести может быть представлено обобщенной моделью Фойгта, но без последовательно присоединенной пружины.

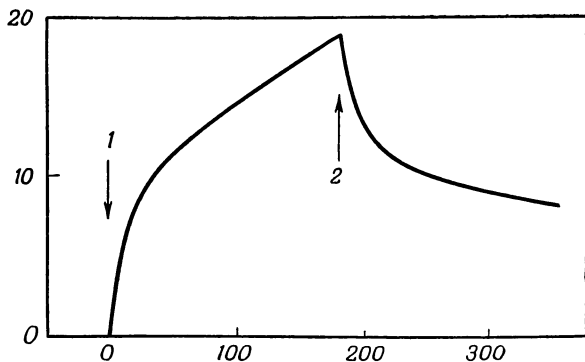
Измерения релаксации напряжения в полиизобутилене, показанные на рис. 12, могут быть моделированы обобщенной моделью Максвелла. Так как при высоких температурах напряжение для больших значений времени падает до нуля, то соответствующая модель не должна иметь параллельно присоединенной пружины. При низкой температуре к модели нужно присоединить параллельно пружину.

Предположим, что проведено два испытания на ползучесть на одном и том же материале, но при разных постоянных напряжениях. Экспериментально установлено, что деформации в одинаковое время после приложения напряжения пропорциональны соответствующим напряжениям, однако при условии, что напряжения не слишком велики. Линейная теория вязко-упругости точна только для



Р и с. 10. Ползучесть и восстановление (по оси ординат) при сдвиге вулканизированного каучука для различных постоянных значений температуры в зависимости от времени (по оси абсцисс)

1—напряжение приложено, 2—напряжение снято



Р и с. 11. Ползучесть и восстановление при сжатии соединения нитроцеллюлозы при температуре 90° С

По оси абсцисс—время, сек. По оси ординат—сжатие, %.
1—напряжение приложено, 2—напряжение снято

бесконечно малых деформаций, но может служить хорошим приближением, когда напряжения не слишком велики. Пределы применимости теории различны для разных материалов и различны для одного материала при разных температурах. Пытаясь понять результаты, подобные показанным на рис. 10—12, многие ученые выдвинули гипотезы

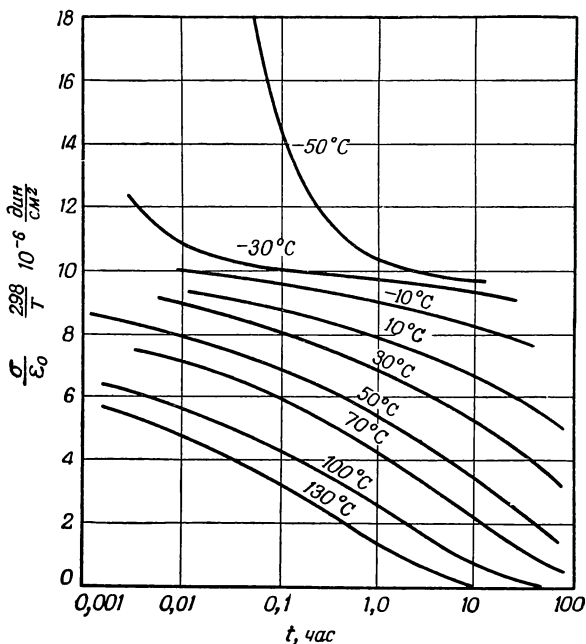


Рис. 12. Релаксация напряжения при постоянной деформации и при различных постоянных значениях температуры нефракционированного полимера полиизобутилена высокого молекулярного веса (σ — напряжение)

о микроскопическом строении отдельных материалов. Обзор этих работ дал Ферри [4]. Эти микроскопические структуры имеют общую важную особенность: все они эквивалентны системе пружин и амортизаторов. В следующей главе теория трехмерной вязко-упругости развивается на основе гипотезы, согласно которой микроскопическая струк-

тура материала механически эквивалентна системе пружин и амортизаторов без какого-либо ограничения на число этих элементов или их комбинацию. Линейность обеспечивается постулатом о малом относительном вращении элементов. Температурные эффекты не включены в теорию. Предполагается, что изменения температуры в частной задаче достаточно малы, чтобы можно было пренебречь каждым изменением, производимым температурой в механических свойствах материала. Если вязко-упругий материал деформируется в отдельных случаях при различной температуре, то механические свойства вообще различны для каждого случая.

Различными авторами применялись в вязко-упругости другие приближения¹⁾. Гросс [5], Ставерман и Шварцль [6] использовали феноменологическое приближение, постулируя существование функции ползучести и используя принцип наложения Больцмана. Это приближение подверглось критике вследствие того, что с его помощью нельзя определить накопленную и рассеянную энергии. Многие авторы, в том числе Алфрей [7] и автор этой книги [8], предполагают, что зависимость между напряжением и деформацией для одномерного случая, полученная путем использования моделей, может быть обобщена на трехмерный случай. Этот метод подвергся критике. Материал имеет трехмерную микроскопическую структуру; нельзя заранее предполагать, что механические свойства трехмерной системы не имеют свойств, отсутствующих в одномерном случае. Био [9] применил в вязко-упругости принципы термодинамики необратимых процессов. Он предположил, что существуют внутренние координаты, связанные с квадратичным потенциалом и функцией рассеивания. Автор настоящей книги считает, что это допущение эквивалентно тому, которое принято в гл. 2; термодинамические постулаты

¹⁾ Следует упомянуть применение уравнений вязко-упругости, основанных на производной дробного порядка (см. Watanabe S., An approach to visco-elastic behaviours with a mathematical method, *J. Text. Mach. Soc. Japan*, 5, № 2, 10—13, 1959; Слонимский Г. Л., О законе деформации высокоэластичных полимерных тел, *ДАН СССР*, 140, № 2, 343—346, 1961).—*Прим. перев.*

заменяются механическими постулатами и результаты обоих допущений одинаковы¹⁾).

ЛИТЕРАТУРА

1. Leaderman H., Rheology, v. 2, Ed. Eirich F. R., Academic Press, New York, 1956.
2. Atkinson E. B., Rheology, v. 2, Ed. Eirich F. R., Academic Press, New York, 1956.
3. Andrews R. D., Tobolsky A. V., Elastoviscous properties of polyisobutylene, relaxation time spectrum and calculation of bulk viscosity, *J. Polymer Sci.*, 7, № 2/3, 221—242 (1951).
4. Ferry J. D., Physik der hochpolymeren, v. 4, Chapter I, Section 8, Springer, Berlin, 1956.
5. Gross B., Mathematical structure of the theories of viscoelasticity, Herman, Paris, 1953.
6. Staverman A. J., Schwarzl L., Physik der hochpolymeren, v. 4, Chapter I, Sections 1—7, Springer, Berlin, 1956.
7. Alfrey T., Mechanical behaviour of high polymers. Interscience, New York, 1948 (русский перевод: Алфрей Т., Механические свойства высокополимеров, М., ИЛ, 1952).
8. Bland D. R., Application of one-sided Fourier transform to the stress analysis of linear viscoelastic materials. Proceedings of the conference on the Properties of Materials at High Rates of strain, p. 156—163, 1957. Published by the Institution of Mechanical Engineers, Westminster — London.
9. Biot M. A., Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena, *J. Appl. Phys.*, 25, № 11, 1385—1391 (1954)

¹⁾ Существующие в настоящее время молекулярные теории вязко-упругих свойств полимеров основаны на термодинамических уравнениях. Поэтому с молекулярной точки зрения термодинамические постулаты имеют преимущество перед механическими. Однако механические постулаты проще термодинамических. Так как автор рассматривает только изотермические процессы, он, естественно, принимает механические постулаты. — *Прим. перев.*

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕХМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ
ВЯЗКО-УПРУГОСТИ ¹⁾

1. Гипотезы

Гипотеза 1

Микроскопическая структура линейного вязко-упругого материала механически эквивалентна системе линейных вязких и упругих элементов.

В последнем параграфе первой главы было отмечено, что эта гипотеза совместима с микроскопическими моделями, которые предлагались для различных материалов, чтобы объяснить экспериментальные результаты. Для краткости линейный упругий элемент в дальнейшем будет называться „пружиной“, а линейный вязкий элемент — „амортизатором“.

Ламб начинает свое исследование по гидродинамике словами ²⁾: „Все исследования этой книги основываются на предположении, что изучаемое вещество можно рассматривать практически непрерывным и однородным, т. е. что свойства наименьших частей, на которые мы можем мыслить вещество разделенным, являются такими же, как и свойства всей массы“. Такое же предположение делается и в этой книге при трактовке макроскопических явлений. Однако „малая часть“ вязко-упругого материала, удовлетворяющая этому предположению, больше, чем „малая часть“ жидкости, рассматриваемая Ламбом. В соответствии с допущением о макроскопической однородности предполагается, что микроскопическая структура материала повторяется через правильные интервалы, которые очень малы в макроскопическом масштабе. Отсюда следует вторая гипотеза.

¹⁾ Эта глава взята из статьи автора [1].

²⁾ Цитируется по русскому переводу: Л а м б Г., Гидродинамика, М., Гостехиздат, 1947, стр. 13. — *Прим. перев.*

Гипотеза 2

„Пространство, занимаемое однородным вязко-упругим материалом при отсутствии внешних сил, может быть подразделено на плотно упакованные прямоугольные параллелепипеды разных размеров, центры которых лежат в узлах прямоугольной решетки так, что микроскопическая структура внутри и снаружи каждого параллелепипеда одинаковая“. Для краткости „прямоугольный параллелепипед“ в дальнейшем будем называть „ящиком“.

Даже если каждый элемент, входящий в систему, является линейным, то зависимость между силой и перемещением для ящиков, на которые разделен материал, будет только тогда линейной, когда относительный поворот соседних элементов мал. Отсюда следует третья гипотеза.

Гипотеза 3

„Удлинение каждого элемента мало“. Теория, изложенная в этой книге, ограничена случаем малых удлинений.

Теперь возникает следующий вопрос: как объяснить тот факт, что некоторые материалы, обычно классифицируемые как вязко-упругие, способны течь с постоянной скоростью при постоянном напряжении и после соответствующего периода времени имеют большую деформацию. Это явление наблюдается только для полимеров без поперечных связей и не наблюдается для поперечно-связанных полимеров. Молекулы полимера без поперечных связей могут скользить одна относительно другой. После большой деформации макроскопическая форма полимера изменяется, но его свойства не изменяются. По-видимому, микроскопическая структура полимера не изменяется, хотя составляющие полимер молекулы перегруппировались. Отсюда следует четвертая гипотеза.

Гипотеза 4

„К деформации в макроскопическом законе, определяющем зависимость между напряжением и деформацией, нужно добавить деформацию, производимую относительным движением молекул. Макроскопический закон есть следствие механических свойств системы внутри каждого ящика, если предположить, что относительные положения молекул и, следовательно, ящиков не меняются“.

Установившееся течение при различных типах напряженного состояния подчиняется закону вязкости Ньютона. Так как при этом не происходит изменения объема, то девиатор тензора деформации имеет вид

$$\eta_{ijkl} D\bar{e}_{kl} = s_{ij},$$

где D обозначает дифференцирование по времени, s_{ij} — девиатор тензора напряжения, η_{ijkl} — постоянный тензор, определяющий механические свойства материала. Для изотропного материала тензор η_{ijkl} должен быть изотропным. Следовательно, в случае изотропного материала получим

$$\eta D\bar{e}_{ij} = s_{ij}. \quad (1)$$

Для поперечно-связанного полимера имеем $1/\eta = 0$. Вязко-упругий материал, для которого $1/\eta \neq 0$, удобно рассматривать как жидкость, а вязко-упругий материал, для которого $1/\eta = 0$, — как твердое тело.

Рассмотренный здесь механизм деформации вязко-упругой жидкости подобен пузырьковой модели, предложенной Брэггом [2]. В этой модели каждый пузырек способен слегка деформироваться, а слои пузырьков могут перемещаться продольно или диагонально один по другому (см. рис. 6 и 8 в упомянутой статье).

Если производные напряжения по пространственным координатам не очень велики, то изменение напряжения на расстоянии порядка нескольких длин ребра ящика будет очень мало. Полная деформация в объеме, диаметр которого имеет тот же порядок, будет существенно однородной. Отсюда следует пятая гипотеза.

Гипотеза 5

„Если A и B — любая пара соответствующих точек с координатами $x_i^{(A)}$ и $x_i^{(B)}$ в сетках смежных ящиков, то перемещения $u_i^{(A)}$ и $u_i^{(B)}$ точек A и B связаны уравнением

$$u_i^{(B)} = u_i^{(A)} + (\varepsilon_{ij} + \xi_{ij})(x_j^{(B)} - x_j^{(A)}), \quad (2)$$

где тензор макроскопической деформации ε_{ij} и тензор вращения ξ_{ij} существенно постоянны в области этих ящиков“.

Деформация $\bar{\epsilon}_{ij}$, обусловленная относительным движением молекул, не включена в деформацию ϵ_{ij} , за исключением случаев, когда оговорено противоположное. Когда производные напряжения по пространственным координатам являются разрывными, изменение напряжения вдоль ящика будет большим; в реальных случаях отношение числа ящиков, в которых изменение напряжения велико, к числу ящиков, в которых оно мало, так близко к нулю, что ошибка, вводимая гипотезой 5, везде пренебрежимо мала.

Так как свойства вязко-упругих материалов рассматриваются только в линейной области, скорости частиц будут малы, и большие количества тепла при вязком рассеивании не могут возникнуть в любой малой области. Отсюда следует шестая гипотеза.

Гипотеза 6

„Энергия на единицу объема, рассеянная в виде тепла, всюду достаточно мала, чтобы можно было считать всякое изменение механических свойств, вызываемое температурой, пренебрежимо малым“. Эта гипотеза обычно принимается при рассмотрении медленного течения вязкой жидкости.

В заключение предполагается, что нет необходимости учитывать инерционные и массовые силы при выводе уравнения движения каждого ящика, т. е. принимается седьмая гипотеза.

Гипотеза 7

„Инерционные и массовые силы достаточно малы, ими можно было пренебречь в уравнении движения каждого узла“¹⁾.

2. Механика микроскопической сетки

Далее, вплоть до § 10, предполагается, что каждый ящик содержит конечное число элементов. Эти элементы связаны каждым концом с одним или несколькими элементами. Точки соединения элементов называются „узлами“. Так как имеется только конечное число узлов и элемен-

¹⁾ Термин „узел“ определяется в следующем параграфе.

тов, подразделение на ящики можно всегда сделать так, чтобы узлы не лежали на гранях ящика, а элементы не пересекали ребра. При этих условиях не будет элементов, принадлежащих более чем двум ящикам, имеющим общую грань. Если элемент принадлежит более чем двум ящикам, то его можно разделить на более мелкие последовательно соединенные элементы так, чтобы каждый элемент принадлежал только двум смежным ящикам. Рассмотрим теперь какой-либо ящик. Если материал вращается как целое, то взаимодействия сетки элементов не происходит. Следовательно, вращение материала всегда может быть выбрано так, чтобы для выбранного ящика компоненты тензора ξ_{ij} равнялись нулю.

Перенумеруем узлы внутри ящика от 1 до n . Пусть направляющие косинусы элемента, связывающего r -й узел с s -м узлом, равны в недеформированном состоянии $l_i^{(rs)}$. Тогда удлинение этого элемента после приложения напряжения равно $l_i^{(rs)}(u_i^{(s)} - u_i^{(r)})$ плюс члены высшего порядка малости. Так как для рассматриваемого ящика относительное вращение элементов мало и $\varepsilon_{ij} = 0$, то абсолютное вращение элементов в ящике является малым.

Если элементом является пружина с упругой постоянной $E^{(rs)}$, то напряжение в элементе равно

$$E^{(rs)} l_i^{(rs)} (u_j^{(s)} - u_j^{(r)}).$$

Пренебрегая опять членами высшего порядка малости, растягивающую силу в элементе, действующую в первоначальном направлении элемента, запишем в виде

$$E^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} (u_j^{(s)} - u_j^{(r)}).$$

Подобным же образом, если r -й и s -й узлы связаны амортизатором с вязкой постоянной $\eta^{(rs)}$, то сила растяжения в элементе равна

$$\eta^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} (Du_j^{(s)} - Du_j^{(r)}).$$

Так как в теории вязко-упругости пренебрегают силами инерции, за исключением случая, когда формулируются макроскопические уравнения движения (гипотеза 7), то

уравнение движения r -узла имеет вид

$$\sum_s E^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} (u_j^{(s)} - u_j^{(r)}) + \sum_s \eta^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} (Du_j^{(s)} - Du_j^{(r)}) = 0, \quad (3)$$

где первая сумма берется для всех узлов, связанных с r пружиной, а вторая сумма берется для всех узлов, связанных с r амортизатором.

Уравнение (3) справедливо для всех узлов r , $r = 1, \dots, n$, лежащих внутри ящика. В общем случае не все узлы s , связанные с r , лежат в рассматриваемом ящике, но они все лежат или в этом ящике, или в одном из шести, имеющих общую грань с данным ящиком. Пусть ребра ящика имеют длины $L^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, и пусть $a_i^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, обозначает единичные векторы, параллельные ребрам ящика. Если узел лежит в ящике, который получен из исходного ящика перемещением каждой точки в положительном направлении, то из уравнения (2), при условии $\xi_{ij} = 0$, получим

$$u_i^{(s)} = u_i^{(s')} + \varepsilon_{ij} L^{(k)} a_j^{(k)},$$

где s' обозначает узел в исходном ящике, соответствующий s . Если перемещения всех точек, лежащих вне ящика, заменяются перемещениями соответствующих точек, лежащих внутри ящика, с помощью приведенного выше уравнения, то уравнение (3) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_s E^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} \left(u_j^{(s')} + \varepsilon_{jm} \sum_k L^{(k)} K^{(k)} a_m^{(k)} - u_j^{(r)} \right) + \\ & + \sum_s \eta^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} \left(Du_j^{(s')} + D\varepsilon_{jm} \sum_k L^{(k)} K^{(k)} a_m^{(k)} - Du_j^{(r)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Все значения $K^{(k)}$ равны нулю, за исключением тех, которые соответствуют узлам, лежащим в ящиках, примыкающих к исходному ящику. Если ящик примыкает к первоначальному ящику со стороны положительного направления $a_i^{(k)}$, то соответствующее $K^{(k)}$ равно $+1$, а другие два значения K , соответствующие двум другим векторам $a_i^{(k)}$, равны нулю. Если ящик, в котором лежит узел s , примыкает к исходному ящику со стороны отрицательного

направления $a_i^{(k)}$, то $K^{(k)}$ равно -1 , а для других двух векторов K равно нулю.

Суммарная сила, действующая через поверхность ящика, равна сумме сил, действующих на элементы, пересекающие эту поверхность. Эта сила может быть выражена через компоненты макроскопического тензора напряжения в виде

$$\pm \frac{T}{L^{(k)}} \sigma_{ij} a_j^{(k)},$$

где T — объем ящика. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{T}{L^{(k)}} \sigma_{ij} a_j^{(k)} = & \sum E^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} (u_j^{(s')} + \epsilon_{jm} L^{(k)} a_m^{(k)} - u_j^{(r)}) + \\ & + \sum \eta^{(rs)} l_i^{(rs)} l_j^{(rs)} (D u_j^{(s')} + D \epsilon_{jm} L^{(k)} a_m^{(k)} - D u_j^{(r)}), \end{aligned} \quad (5)$$

где суммы берутся по всем элементам, пересекающим грани ящика, которым соответствуют внешние нормали $+a_i^{(k)}$.

Если V обозначает упругую энергию, приходящуюся на единицу объема и накопленную в пружинах, то

$$2TV = \sum_{\substack{rs \\ r > s}} E^{(rs)} \left[l_j^{(rs)} (u_j^{(s')} + \epsilon_{jm} \sum_k L^{(k)} K^{(k)} a_m^{(k)} - u_j^{(r)}) \right]^2. \quad (6)$$

Если ϕ представляет собой скорость рассеивания энергии на единицу объема, то

$$T\phi = \sum_{\substack{rs \\ r > s}} \eta^{(rs)} \left[l_j^{(rs)} (D u_j^{(s')} + D \epsilon_{jm} \sum_k L^{(k)} K^{(k)} a_m^{(k)} - D u_j^{(r)}) \right]^2, \quad (7)$$

где суммы берутся соответственно по всем пружинам и амортизаторам, лежащим внутри ящика или пересекающим грани, которым соответствуют внешние нормали $+a_i^{(k)}$.

Уравнения (4) и (5) являются соответственно уравнениями равновесия внутренних и внешних сил, действующих на сетку, лежащую внутри ящика. Уравнения (6) и (7) определяют накопленную и рассеянную энергии в ящике. Микроскопическая структура вязко-упругого материала, использованная при выводе уравнений (4) — (7), не применяется в последующем обсуждении до § 10.

3. Введение нормальных координат

Прежде всего заметим, что уравнения (4) и (5) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial u_j^{(r)}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial Du_j^{(r)}} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial D\varepsilon_{ij}} = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ij} a_l^{(k)} a_j^{(k)}, \quad (9)$$

где V — положительная полуопределенная квадратичная форма от $3n$ перемещений $u_j^{(r)}$ и девяти деформаций ε_{ij} , а φ — такая же форма от $3n$ скоростей перемещения $Du_j^{(r)}$ и девяти скоростей деформации $D\varepsilon_{ij}$. Пусть φ' обозначает квадратичную форму, идентичную форме φ , за исключением того, что $Du_j^{(r)}$ заменено на $u_j^{(r)}$, а $D\varepsilon_{ij}$ — на ε_{ij} . Пусть формы V , φ и $2V + \varphi'$ имеют соответственно ранги R , S , M . Покажем теперь, что существуют действительные линейные преобразования¹⁾

$$u_j^{(r)} = \sum_{k=1}^M \gamma_{3r+j}^{(k)} \zeta_k, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^M \gamma_{ij}^{(k)} \zeta_k, \quad (11)$$

такие, что

$$2V = \sum_{i=1}^{M-S} \zeta_i^2 + \sum_{i=M-S+1}^R (1 - \Lambda^{(i)}) \zeta_i^2 \quad (12)$$

и

$$\kappa^{-1} \varphi = \sum_{i=M-S+1}^R \Lambda^{(i)} (D\zeta_i)^2 + \sum_{i=R+1}^M (D\zeta_i)^2, \quad (13)$$

где κ — единичная постоянная, имеющая размерность времени, и $0 < \Lambda^{(i)} < 1$.

Так как форма V имеет ранг R , то существуют действительные линейные преобразования

$$u_j^{(r)} = \sum_{k=1}^N \alpha_{3r+j}^{(k)} \eta_k \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^N \alpha_{ij}^{(k)} \eta_k,$$

¹⁾ Этим доказательством автор обязан Ледерману из Манчестерского университета.

такие, что V есть положительно определенная форма от $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_R$, и такие, что φ' хотя и остается еще полуопределенной положительной формой от $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_R$, но эта форма положительно определенная от $\eta_{R+1}, \eta_{R+2}, \dots, \eta_N$, когда $V=0$. Ранг формы $2V + \varphi'$ остается после преобразования равным M , так как $N \geq M$. Если $N > M$, то существует не равное нулю η_i , для которого $2V + \varphi' = 0$. Таким образом, формы V и φ' неотрицательные и уравнение $2V + \varphi' = 0$ означает, что одновременно $V=0$ и $\varphi'=0$. Но $V=0$ означает, что $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_R=0$, а $\varphi'=0$ предполагает, что $\eta_{R+1}, \eta_{R+2}, \dots, \eta_N=0$; но одно противоречит другому. Следовательно, $N=M$.

Так как $2V + \varphi'$ — положительно определенная форма от η_i , то существует действительное линейное преобразование

$$\eta_j = \sum_{i=1}^M \beta_{ji} \xi_i,$$

такое, что

$$2V + \varphi' = \sum_{i=1}^M \xi_i^2$$

и

$$\varphi' = \sum_{i=M-S+1}^M \Lambda^{(i)} \xi_i^2.$$

Вычитанием получаем

$$2V = \sum_{i=1}^{M-S} \xi_i^2 + \sum_{i=M-S+1}^M (1 - \Lambda^{(i)}) \xi_i^2.$$

Но квадратичная форма V имеет ранг R , следовательно, ранг $M-R$ матрицы $\Lambda^{(i)}$ должен быть равен единице. Переменные ξ_i выбираются так, чтобы $\Lambda^{(i)} = 1$ для $i = R+1, R+2, \dots, M$. Так как квадратичные формы φ' и V неотрицательные, то $0 < \Lambda^{(i)} < 1$ для всех $\Lambda^{(i)}$ в выражениях (12) и (13). Произведение двух действительных линейных преобразований есть действительное линейное преобразование. Это доказывает положение, принятое при выводе соотношений (10) — (13). Переменные ξ_i называются *нормальными координатами*.

Из уравнений (12) и (13) получим

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial D \xi_i} = (1 - \Lambda^{(i)}) \xi_i + \kappa \Lambda^{(i)} D \xi_i.$$

Но, кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial D \xi_i} = & \sum_{r, j} \frac{\partial V}{\partial u_j^{(r)}} \frac{\partial u_j^{(r)}}{\partial \xi_i} + \sum_{j, k} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{jk}} \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial \xi_i} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r, j} \frac{\partial \varphi}{\partial D u_j^{(r)}} \frac{\partial D u_j^{(r)}}{\partial D \xi_i} + \frac{1}{2} \sum_{j, k} \frac{\partial \varphi}{\partial D \varepsilon_{jk}} \frac{\partial D \varepsilon_{jk}}{\partial D \xi_i}. \end{aligned}$$

Используя сначала уравнения (10) и (11), затем уравнения (8) и (9), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial D \xi_i} = & \sum_{r, j} \gamma_{3r+j}^{(i)} \left(\frac{\partial V}{\partial u_j^{(r)}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial D u_j^{(r)}} \right) + \\ & + \sum_{j, k} \gamma_{jk}^{(i)} \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{jk}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial D \varepsilon_{jk}} \right) = \sum_{j, k} \gamma_{jk}^{(i)} \sum_{m=1}^3 \sigma_{jl} a_l^{(m)} a_k^{(m)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(1 - \Lambda^{(i)}) \xi_i + \kappa \Lambda^{(i)} D \xi_i = \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} \sigma_{jl} a_l^{(m)} a_k^{(m)}, \quad (14)$$

где знак суммирования по индексам j и k пропущен, так как это суммирование упоминалось достаточно часто.

Интегрирование для значений

$$M - S < t \leq R, \quad 0 < \Lambda^{(i)} < 1,$$

дает

$$\xi_i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\kappa \Lambda^{(i)}} \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} e^{-\lambda^{(i)}(t-\tau)} \sigma_{jl}(\tau) d\tau,$$

где

$$\lambda^{(i)} = \frac{1 - \Lambda^{(i)}}{\kappa \Lambda^{(i)}}, \quad (15)$$

и предполагается, что $\xi_i \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow -\infty$.

Интегрируя по частям, получим

$$\zeta_i(t) = \frac{1}{\kappa \Lambda^{(i)} \lambda^{(i)}} \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} \int_{-\infty}^t [1 - e^{-\lambda^{(i)}(t-\tau)}] d\sigma_{jl}(\tau). \quad (16)$$

Для значений $i \leq M - S$ имеем

$$\zeta_i(t) = \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} \sigma_{jl}(t), \quad (17)$$

а для значений $i > R$ найдем

$$\zeta_i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\kappa} \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} \sigma_{jl}(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Для того чтобы получить зависимость между напряжением и деформацией, подставим значения нормальных координат ζ_i в выражение (11)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \sum_{k=1}^M \gamma_{ij}^{(k)} \zeta_k = \sum_{k=1}^{M-S} \gamma_{ij}^{(k)} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} \sigma_{pl}(t) + \\ & + \sum_{k=R+1}^M \gamma_{ij}^{(k)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\kappa} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} \sigma_{pl}(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{k=M-S+1}^R \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\kappa \Lambda^{(k)} \lambda^{(k)}} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} \int_{-\infty}^t [1 - e^{-\lambda^{(k)}(t-\tau)}] d\sigma_{pl}(\tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь значения деформации ε_{ij} , определяемые выражением (19), должны быть малыми для всех конечных значений напряжений σ_{ij} . Из рассмотрения второй суммы, входящей в (19), следует, что $\varepsilon_{ij} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ для $\sigma_{ij} = H(t) A_{ij}$, где A_{ij} — константы, равные нулю. Это противоречит гипотезе 3, следовательно, $R = M$, и соот-

ношение (19) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = & \sum_{k=1}^{R-S} \gamma_{ij}^{(k)} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} \sigma_{pl}(t) + \\ & + \sum_{k=R-S+1}^R \gamma_{ij}^{(k)} \frac{1}{\kappa \Lambda^k \lambda^k} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^t [1 - e^{-\lambda^{(k)}(t-\tau)}] d\sigma_{pl}(\tau). \quad (20) \end{aligned}$$

Величины $\Lambda^{(i)}$ и, следовательно, $\lambda^{(i)}$ не являются вообще особыми. Пусть особые значения $\Lambda^{(i)}$ перенумерованы от 1 до N . Тогда для частного значения $\Lambda^{(i)}$, которое обозначим через $\Lambda^{(b)}$, коэффициент при интеграле

$$\int_{-\infty}^t [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] d\sigma_{pl}(\tau)$$

в зависимости (20) равен

$$\frac{1}{\kappa \Lambda^{(b)} \lambda^{(b)}} \sum_{\Lambda^{(k)} = \Lambda^{(b)}} \gamma_{ij}^{(k)} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)}.$$

Этот коэффициент умножается на тензор второго ранга σ_{ij} и дважды свертывается, образуя другой тензор второго ранга ε_{ij} . Следовательно, этот коэффициент сам является тензором четвертого ранга. Но этот коэффициент описывает также механические свойства материала, который, по предположению, изотропный. Таким образом, рассматриваемый коэффициент должен быть изотропным тензором четвертого ранга (см., например, [3]), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa \Lambda^{(b)} \lambda^{(b)}} \sum_{\Lambda^{(k)} = \Lambda^{(b)}} \gamma_{ij}^{(k)} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} = & \frac{\alpha^{(b)}}{2} (\delta_{ip} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jp}) - \\ & - \beta^{(b)} \delta_{ij} \delta_{pl} + \frac{\delta^{(b)}}{2} (\delta_{ip} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jp}). \quad (21) \end{aligned}$$

Вообще сумма равных значений $\Lambda^{(k)}$ должна иметь не менее шести членов. Это можно заметить, если умножить уравнение (21) на $A_{ij}A_{pl}$, где A_{ij} — тензор второго ранга¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa \Lambda^{(b)} \lambda^{(b)}} \sum_{\Lambda^{(k)} = \Lambda^{(b)}} \gamma_{ij}^{(k)} A_{ij} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} A_{pl} = \\ = \frac{\alpha^{(b)} + \delta^{(b)}}{2} A_{ij} A_{ij} + \frac{\alpha^{(b)} - \delta^{(b)}}{2} A_{ij} A_{ji} - \beta^{(b)} A_{ii} A_{jj}. \end{aligned}$$

В правой части этого уравнения величины $\alpha^{(b)}$, $\beta^{(b)}$ и $\delta^{(b)}$ могут быть выражены в общем случае через три главных компонента симметричной части тензора A_{ij} и три компонента антисимметричной части; следовательно, они имеют ранг 6. Левая часть является суммой квадратов, так как в случае, когда оси x_i параллельны векторам $a_k^{(i)}$, имеем $a_l^{(m)} = \delta_{lm}$ и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} A_{pl} = \gamma_{pq}^{(k)} A_{pq}.$$

Это справедливо при любом выборе осей, так как обе стороны уравнения инвариантны. Следовательно, в левую часть уравнения входят тензоры шестого ранга, поэтому левая часть уравнения должна включать не менее шести членов. Так как эта часть уравнения неотрицательна для всех тензоров A_{ij} , то, полагая сначала $A_{ii} = 0$ и $A_{ij} = A_{ji}$, а затем считая $A_{ij} = \delta_{ij}$, получим

$$\alpha^{(b)} \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha^{(b)} - 3\beta^{(b)} \geq 0. \quad (22)$$

Первая сумма в правой части выражения (20) преобразовывается подобным же образом. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{R-S} \gamma_{ij}^{(k)} \sum_{m=1}^3 \gamma_{pq}^{(k)} a_l^{(m)} a_q^{(m)} = \frac{\alpha}{2} (\delta_{ip} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jp}) - \\ - \beta \delta_{ij} \delta_{pl} + \frac{\delta}{2} (\delta_{ip} \delta_{jl} - \delta_{ip} \delta_{jp}). \quad (23) \end{aligned}$$

¹⁾ Это соображение подсказал автору профессор Лайтхилл из Манчестерского университета.

Подстановка правых частей соотношений (21) и (23) в формулу (20) дает

$$\varepsilon_{ij}(t) = \alpha s_{ij}(t) - \beta \delta_{ij} \sigma_{kk}(t) + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^t (1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}) \times \\ \times (\alpha^{(b)} d\sigma_{ij}(\tau) - \beta^{(b)} \delta_{ij} d\sigma_{kk}(\tau)). \quad (24)$$

Выражение (24) является одной из форм зависимости между напряжением и деформацией для изотропного вязко-упругого твердого тела. Для изотропной вязко-упругой жидкости к правой части уравнения (24) нужно прибавить деформацию ε_{ij} , создаваемую относительным движением молекул. Используя формулу (1), получаем

$$\varepsilon_{ij} = \alpha s_{ij} - \beta \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t s_{ij}(\tau) d\tau + \\ + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^t [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] (\alpha^{(b)} d\sigma_{ij}(\tau) - \beta^{(b)} \delta_{ij} d\sigma_{kk}(\tau)). \quad (25)$$

4. Разделение общей деформации на девиатор и объемную деформацию

Обозначим через e_{ij} компоненты девиатора деформации, а через s_{ij} — компоненты девиатора напряжения, тогда

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad \text{и} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}. \quad (26)$$

Из формулы (25) получим

$$e_{ij} = \alpha s_{ij} + \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t s_{ij}(\tau) d\tau + \sum_{b=1}^N \alpha^{(b)} [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] ds_{ij}(\tau). \quad (27)$$

и

$$\varepsilon_{kk} = \gamma \sigma_{kk} + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^t \gamma^{(b)} [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] d\sigma_{kk}(\tau), \quad (28)$$

где

$$\gamma^{(b)} = \alpha^{(b)} - 3\beta^{(b)} \quad \text{и} \quad \gamma = \alpha - 3\beta. \quad (29)$$

Согласно оценке (22), имеем

$$\alpha^{(b)} \geq 0 \quad \text{и} \quad \gamma^{(b)} \geq 0. \quad (30)$$

Зависимость (25) можно получить исходя из соотношений (27) и (28).

Покажем теперь, что накопленная энергия V может быть представлена суммой двух частей, из которых одна зависит от девиатора деформации, а другая — от объемной деформации. Подстановка значения ξ_i из (16), при условии $0 < \Lambda^{(i)} < 1$, дает

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} (1 - \Lambda^{(i)}) \xi_i^2 &= \\ &= \frac{1 - \Lambda^{(b)}}{(\kappa \Lambda^{(b)} \lambda^{(b)})^2} \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} \sum_{n=1}^3 \gamma_{pq}^{(i)} a_r^{(n)} a_q^{(n)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^t \int [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)}] d\sigma_{jl}(\tau) d\sigma_{pr}(\theta). \end{aligned}$$

С помощью формул (15) и (21) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} (1 - \Lambda^{(i)}) \xi_i^2 &= \\ &= \int_{-\infty}^t \int [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)}] \times \\ &\times \sum_{m=1}^3 [\alpha^{(b)} a_l^{(m)} a_r^{(m)} d\sigma_{pl}(\tau) d\sigma_{pr}(\theta) - \beta^{(b)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} d\sigma_{kl}(\tau) d\sigma_{rr}(\theta)]. \end{aligned}$$

Если оси x_i параллельны векторам $a_k^{(i)}$, то $a_k^{(i)} = \delta_{ik}$. Поэтому

$$\sum_{m=1}^3 a_l^{(m)} a_r^{(m)} d\sigma_{pl}(\tau) d\sigma_{pr}(\theta) = d\sigma_{l, l}(\tau) d\sigma_{p, p}(\theta)$$

и

$$\sum_{m=1}^3 a_l^{(m)} a_k^{(m)} d\sigma_{kl}(\tau) = d\sigma_{kk}(\tau).$$

Но обе части этих двух уравнений инвариантны и, следовательно, справедливы для любой системы координат. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} &= (1 - \Lambda^{(i)}) \xi_i^2 = \\ &= \int_{-\infty}^t \int [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)}] (\alpha^{(b)} db_{jk}(\theta) d\sigma_{jk}(\tau) - \\ &\quad - \beta^{(b)} d\sigma_{jj}(\theta) d\sigma_{kk}(\tau)). \end{aligned}$$

Введем приращения компонентов девиатора напряжения

$$d\sigma_{jk}(\theta) d\sigma_{jk}(\tau) = ds_{jk}(\theta) ds_{jk}(\tau) + \frac{1}{3} d\sigma_{ii}(\theta) d\sigma_{jj}(\tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} (1 - \Lambda^{(i)}) \xi_i^2 &= \\ &= \int_{-\infty}^t \int [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)}] \left(\alpha^{(b)} ds_{jk}(\theta) ds_{jk}(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \gamma^{(b)} d\sigma_{jj}(\theta) d\sigma_{kk}(\tau) \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим

$$\sum_{i=1}^{M-S} \xi_i^2 = \alpha s_{jk} s_{jk} + \frac{1}{3} \gamma \sigma_{jj} \sigma_{kk}.$$

Подстановка из последних двух зависимостей в равенство (12) дает

$$\begin{aligned} 2V &= \alpha s_{jk} s_{jk} + \sum_{b=1}^N \alpha^{(b)} \int_{-\infty}^t \int [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] \times \\ &\quad \times [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)}] ds_{jk}(\theta) ds_{jk}(\tau) + \\ &\quad + \frac{1}{3} \gamma \sigma_{jj} \sigma_{kk} + \frac{1}{3} \sum_{b=1}^N \gamma^{(b)} \int_{-\infty}^t \int [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] \times \\ &\quad \times [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)}] d\sigma_{jj}(\theta) d\sigma_{kk}(\tau). \quad (31) \end{aligned}$$

Скорость рассеивания энергии на единицу объема φ может быть получена подобным способом. Зависимость (13) нужно теперь модифицировать, так как $R = M$, и она не содержит энергии, рассеянной за счет относительного движения молекул [см. равенство (1)]. Поэтому вместо (13) запишем

$$\varphi = \kappa \sum_{i=R-S+1}^R \Lambda^{(i)} (D\xi_i)^2 + \frac{1}{\eta} s_{ij} s_{ij}. \quad (32)$$

Для вязко-упругого твердого тела второй член в правой части уравнения обращается в нуль, так как для этого тела $1/\eta = 0$. Из формулы (16) получим

$$\begin{aligned} D\xi_i(t) &= \frac{1}{\kappa \Lambda^{(i)}} \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda^{(i)}(t-\tau)} d\sigma_{jl}(\tau), \\ \kappa \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} \Lambda^{(i)} (D\xi_i)^2 &= \frac{1}{\kappa \Lambda^{(b)}} \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} \times \\ &\times \sum_{n=1}^3 \gamma_{pq}^{(i)} a_r^{(n)} a_q^{(n)} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-\lambda^{(i)}(t-\tau)} e^{-\lambda^{(i)}(t-\theta)} d\sigma_{jl}(\tau) d\sigma_{pr}(\theta). \end{aligned}$$

Откуда, как и выше, имеем

$$\begin{aligned} \kappa \sum_{\Lambda^{(i)} = \Lambda^{(b)}} \Lambda^{(i)} (D\xi_i)^2 &= \\ &= \lambda^{(b)} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-\lambda^{(b)}(2t-\tau-\theta)} \left[\alpha^{(b)} ds_{jk}(\theta) ds_{jk}(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \gamma^{(b)} d\sigma_{jj}(\theta) d\sigma_{kk}(\tau) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\eta} s_{ij} s_{ij} + \sum_{b=1}^N \lambda^{(b)} \alpha^{(b)} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-\lambda^{(b)}(2t-\tau-\theta)} ds_{jk}(\theta) ds_{jk}(\tau) + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{b=1}^N \lambda^{(b)} \gamma^{(b)} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-\lambda^{(b)}(2t-\tau-\theta)} d\sigma_{jj}(\theta) d\sigma_{kk}(\tau). \quad (33) \end{aligned}$$

Из соотношений (27), (28), (31) и (33) следуют важные результаты.

„В линейном изотропном вязко-упругом материале: 1) каждый компонент девиатора деформации единственным образом связан с соответствующим компонентом девиатора напряжения соотношением, определяющим зависимость между напряжением и деформацией, и эта зависимость одинакова для каждого компонента девиатора; 2) объемная деформация единственным образом связана с частью напряжения, которая соответствует гидростатическому давлению¹⁾; 3) накопленная и рассеянная энергии являются суммами десяти членов, из которых девять (шесть из них попарно равны) зависят от девяти компонентов девиатора деформации и одинаковы по форме, а десятый член зависит от объемной деформации. Произведения двух компонентов девиатора деформации или компонента девиатора и объемной деформации не встречаются“.

Таким образом, в остающейся части этой главы нет необходимости обсуждать отдельно девиатор деформации и объемную деформацию. Рассмотрим зависимость между напряжением и деформацией

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma + \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^t B^{(b)} [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] d\sigma(\tau). \quad (34)$$

Накопленная энергия на единицу объема равна

$$2AV = \frac{1}{E} \sigma^2 + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B^{(b)} [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] \times \\ \times [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)}] d\sigma(\theta) d\sigma(\tau), \quad (35)$$

а скорость рассеивания энергии на единицу объема равна

$$A\dot{\varphi} = \frac{1}{\eta} \sigma^2 + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \lambda^{(b)} B^{(b)} e^{-\lambda^{(b)}(2t-\tau-\theta)} d\sigma(\theta) d\sigma(\tau). \quad (36)$$

Переменные ε и σ можно считать соответственно компонентами девиатора деформации и напряжения или объемной

¹⁾ Изотропная часть тензора напряжения. — *Прим. ред.*

деформацией и гидростатическим напряжением. При этом для компонента девиатора деформации

$$\frac{1}{E} = \alpha, \quad B^{(b)} = \alpha^{(b)}, \quad A = 1,$$

для объемной деформации (37)

$$\frac{1}{E} = \gamma, \quad B^{(b)} = \gamma^{(b)}, \quad A = 3.$$

Для системы, имеющей несколько компонент, накопленная и рассеянная энергии равны суммам соответствующих значений по всем компонентам. Заметим, что для объемной деформации $(1/\eta) = 0$. Микроскопическая модель была построена так, чтобы через длительный промежуток времени, после того как все внешние силы сняты, материал всегда возвращался к своему первоначальному объему.

Одномерное поведение вязко-упругого материала рассматривали многие авторы. В этом случае предполагается, что все элементы модели простираются в одном направлении и зависимость, связывающая напряжение и деформацию, имеет форму (34) (см. [4]). Рассмотрим стержень, для которого все компоненты напряжения, кроме σ_{11} , равны нулю, а ось x_1 направлена вдоль стержня. Из формулы (25) в этом случае получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & (\alpha - \beta) \sigma_{11} + \frac{2}{3\eta} \int_{-\infty}^t \sigma_{11}(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^t (\alpha^{(b)} - \beta^{(b)}) [1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)}] d\sigma_{11}(\tau), \end{aligned} \quad (37a)$$

это соотношение совпадает по форме с (34).

С помощью выражений (25), (31) и (33) можно показать, что закон сохранения энергии выполняется, т. е.

$$DV + \varphi = \sigma_{ij} D\varepsilon_{ij}. \quad (38)$$

5. Лемма

В этом параграфе доказываются лемма и три вытекающих из нее следствия.

Лемма. Если все θ_r и λ_r положительны и $\lambda_r < \lambda_{r+1}$, то

$$\left(\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} \right)^{-1} = E' + \eta' p + p \sum_{r=1}^{M-1} \frac{C_r}{p + \mu_r},$$

где E' , η' , все C_r и все μ_r положительны и $\lambda_r < \mu_r < \lambda_{r+1}$; причем μ_r упорядочены так, чтобы $\mu_{r+1} > \mu_r$.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} = \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right) p_{M-1} \left(\prod_{r=1}^M (p + \lambda_r) \right)^{-1},$$

где p_{M-1} — многочлен степени $M-1$ от p с действительными положительными коэффициентами; коэффициент при p^{M-1} равен единице. Многочлен p_{M-1} может быть выражен в виде

$$p_{M-1} = \prod_{r=1}^{M-1} (p + \mu_r),$$

где значения μ_r , которые оказываются действительными, являются попарно сопряженными. Следовательно,

$$\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} = \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right) \left(\prod_{r=1}^{M-1} (p + \mu_r) \right) \left(\prod_{r=1}^M (p + \lambda_r) \right)^{-1}.$$

Из теории простых дробей имеем

$$\theta_s = \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right) \left(\prod_{r=1}^{M-1} (-\lambda_s + \mu_r) \right) \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^M (-\lambda_s + \lambda_r) \right)^{-1}.$$

Здесь θ_s и $\sum_{r=1}^M \theta_r$ положительны. Произведение

$$\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^M (-\lambda_s + \lambda_r)$$

положительно для нечетных s и отрицательно для четных s . Следовательно, произведение

$$\prod_{r=1}^{M-1} (-\lambda_s + \mu_r)$$

положительно для нечетных s и отрицательно для четных s . Если μ_r комплексное и $\bar{\mu}_r$ обозначает величину, комплексно-сопряженную с μ_r , то произведение $(-\lambda_s + \mu_r)(-\lambda_s + \bar{\mu}_r)$ положительно для всех λ_s . Если μ_r действительное, то $-\lambda_s + \mu_r$ изменяет знак тогда и только тогда, когда $-\lambda_s$ возрастает в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Теперь произведение

$$\prod_{r=1}^{M-1} (-\lambda_s + \mu_r)$$

изменяет знак $M-1$ раз, когда λ_s принимает значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$. Эти изменения совместны только тогда, когда один и только один множитель в произведении

$$\prod_{r=1}^{M-1} (-\lambda_s + \mu_r)$$

изменяет знак при возрастании s на единицу. Это происходит только в том случае, когда все μ_r действительны и одно и только одно μ_r лежит между последовательными значениями λ_r . Если μ_r выбрано так, чтобы $\mu_{r+1} > \mu_r$, тогда будем иметь $\lambda_r < \mu_r < \lambda_{r+1}$. Так как $\lambda_1 > 0$, то и $\mu_r > 0$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} \right)^{-1} &= \\ &= \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right)^{-1} \left(\prod_{r=1}^M (p + \lambda_r) \right) \left(\prod_{r=1}^{M-1} (p + \mu_r) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\eta' = \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right)^{-1}$$

и

$$E' = \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right)^{-1} \left(\prod_{r=1}^M \lambda_r \right) \left(\prod_{r=1}^{M-1} \mu_r \right)^{-1},$$

тогда

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} \right)^{-1} - E' - \eta' p = \\ & = \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right)^{-1} \left(\prod_{r=1}^{M-1} (p + \mu_r) \right)^{-1} \left[\left(\prod_{r=1}^M (p + \lambda_r) \right) - \right. \\ & \left. - p \left(\prod_{r=1}^{M-1} (p + \mu_r) \right) - \left(\prod_{r=1}^M \lambda_r \right) \left(\prod_{r=1}^{M-1} \mu_r \right)^{-1} \prod_{r=1}^{M-1} (p + \mu_r) \right]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках имеет форму pP_{M-2} . Следовательно, разлагая на простые дроби, получаем

$$\left(\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} \right)^{-1} - E' - \eta' p = p \sum_{r=1}^{M-1} \frac{C_r}{p + \mu_r},$$

где

$$\begin{aligned} C_s = & \left(\sum_{r=1}^M \theta_r \right)^{-1} (-\mu_s)^{-1} \times \\ & \times \left(\prod_{r=1}^M (-\mu_s + \lambda_r) \right) \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{M-1} (-\mu_s + \mu_r) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_r < \mu_r < \lambda_{r+1}$ и $\lambda_1 \geq 0$, то $C_s > 0$. Это полностью доказывает лемму.

Следствие 1. Если $\lambda_1 \rightarrow \infty$, то $E' \rightarrow 0$.

Следствие 2. Если $\lambda_M \rightarrow \infty$ и $\theta_M \rightarrow \infty$ так, что $\lambda_M \theta_M^{-1} \rightarrow E$, то

$$\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} \rightarrow \frac{1}{E} + \sum_{r=1}^{M-1} \frac{\theta_r}{p + \lambda_r}, \quad \eta' \rightarrow 0,$$

$$E' \rightarrow E \left(\prod_{r=1}^{M-1} \lambda_r \right) \left(\prod_{r=1}^{M-1} \mu_r \right)^{-1},$$

$$C_s \rightarrow (-\mu_s)^{-1} \left(\prod_{r=1}^{M-1} (-\mu_s + \lambda_r) \right) \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{M-1} (-\mu_s + \mu_r) \right)^{-1}.$$

Следствие 3. Если $\lambda_1 \rightarrow 0$ и $\lambda_M \rightarrow \infty$, $\theta_M \rightarrow \infty$ так, что $\lambda_M \theta_M^{-1} \rightarrow E$, то

$$\sum_{r=1}^M \frac{\theta_r}{p + \lambda_r} \rightarrow \frac{1}{E} + \frac{\theta_1}{p} + \sum_{r=2}^{M-1} \frac{\theta_r}{p + \lambda_r}, \quad \eta' \rightarrow 0, \\ E' \rightarrow 0,$$

$$C_s \rightarrow (-\mu_s)^{-1} \left(\prod_{r=1}^{M-1} (-\mu_s + \lambda_r) \right) \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{M-1} (-\mu_s + \mu_r) \right)^{-1}.$$

6. Функции ползучести и релаксации

Если деформация вызвана приложением напряжения, равного единичной функции Хевисайда $H(t)$, то часть деформации, остающаяся после вычитания мгновенной упругой деформации и деформации установившегося вязкого течения, называется *функцией ползучести*. Если подставить $\sigma(t) = H(t)$ в выражение (34), то получим

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} H(t) + \frac{1}{\eta} t H(t) + \sum_{b=1}^N B^{(b)} [1 - e^{-\lambda^{(b)} t}] H(t).$$

Таким образом, имеем следующий результат.

„Функция ползучести для девиатора деформации и объемной деформации линейного изотропного вязко-упругого материала, микроскопическая структура которого состоит только из конечного числа элементов, имеет вид

$$\psi(t) = \sum_{b=1}^N B^{(b)} [1 - e^{-\lambda^{(b)} t}] H(t), \quad (39)$$

где $B^{(b)}$ и $\lambda^{(b)}$ — положительные постоянные“.

Вводя функцию ползучести $\psi(t)$ из соотношения (39) в формулу (34), получаем

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \psi(t - \tau) d\sigma(\tau). \quad (40)$$

Накопленная и рассеянная энергии могут быть выражены через напряжение в предшествующее время или через

функцию ползучести. Из выражения (35) имеем

$$2AV = \frac{1}{E} \sigma^2 + \sum_{b=1}^N \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t B^{(b)} \left\{ \left[1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\tau)} \right] + \right. \\ \left. + \left[1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-\theta)} \right] - \left[1 - e^{-\lambda^{(b)}(2t-\tau-\theta)} \right] \right\} d\sigma(\tau) d\sigma(\theta).$$

Следовательно,

$$2AV = \frac{1}{E} \sigma^2 + 2\sigma \int_{-\infty}^t \psi(t-\tau) d\sigma(\tau) - \\ - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \psi(2t-\tau-\theta) d\sigma(\tau) d\sigma(\theta). \quad (41)$$

Из формулы (39) найдем

$$\psi'(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \sum_{b=1}^N \lambda^{(b)} B^{(b)} e^{-\lambda^{(b)}t} H(t),$$

следовательно, зависимость (36) дает

$$A\varphi = \frac{1}{\eta} \sigma^2 + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \psi'(2t-\tau-\theta) d\sigma(\tau) d\sigma(\theta). \quad (42)$$

Для того чтобы найти выражение напряжения через деформацию, обратим формулу (34). Если двустороннее преобразование Лапласа

$$\bar{\kappa}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} \kappa(t) dt \quad (43)$$

применить к соотношениям (39) и (40), то

$$\bar{\psi} = \sum_{b=1}^N \frac{B^{(b)} \lambda^{(b)}}{p(p + \lambda^{(b)})}, \quad \bar{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta p} + p \bar{\psi} \right) \bar{\sigma} \quad (44)$$

или

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta p} + \sum_{b=1}^N \frac{B^{(b)} \lambda^{(b)}}{p + \lambda^{(b)}} \right) \bar{\sigma}. \quad (45)$$

Используя лемму и ее следствия из предыдущего параграфа, получаем

$$\bar{\sigma} = \left(E' + \eta' p + \sum_{r=1}^{N'} \frac{C^{(r)} p}{p + \mu^{(r)}} \right) \bar{\varepsilon}. \quad (46)$$

Здесь $C^{(r)}$ и $\mu^{(r)}$ — все действительные и положительные. Если $1/E = 0$, то $\eta' > 0$; если $1/E > 0$, то $\eta' = 0$. Если $1/\eta = 0$, то $E' > 0$; если $1/\eta > 0$, то $E' = 0$. Если $E' > 0$ и $\eta' > 0$, то $N' = N - 1$; если $E' > 0$ и $\eta' = 0$ или если $E' = 0$ и $\eta' = 0$, тогда $N' = N$; если $E' = \eta' = 0$, то $N' = N + 1$. Если $1/\eta = 0$, то $\lambda^{(r)} < \mu^{(r)} < \lambda^{(r+1)}$; если $1/\eta \neq 0$, то $\lambda^{(r-1)} < \mu^{(r)} < \lambda^{(r)}$.

Обратив преобразования в формуле (46), получим

$$\sigma(t) = E' \varepsilon(t) + \eta' D \varepsilon(t) + \sum_{r=1}^{N'} \int_{-\infty}^t C^{(r)} e^{-\mu^{(r)}(t-\tau)} d\varepsilon(\tau). \quad (47)$$

Функция релаксации $\chi(t)$ равна той части напряжения, которое производит деформацию, равную единичной функции Хевисайда $H(t)$, поэтому равна напряжению, остающемуся после исключения начального бесконечного напряжения и предельного напряжения, если оно не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Положив в выражении (47) $\varepsilon(t) = H(t)$, получаем

$$\sigma(t) = E' H(t) + \eta' \delta(t) + \sum_{r=1}^{N'} C^{(r)} e^{-\mu^{(r)} t} H(t),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Таким образом, имеем следующий результат.

„Функция релаксации для девиатора и объемной деформации линейного изотропного вязко-упругого материала, микроскопическая структура которого состоит только из конечного числа элементов, имеет вид

$$\chi(t) = \sum_{r=1}^{N'} C^{(r)} e^{-\mu^{(r)} t} H(t), \quad (48)$$

где $C^{(r)}$ и $\mu^{(r)}$ — положительные постоянные“.

Вводя функцию релаксации $\chi(t)$ из формулы (48) в зависимость (47), найдем

$$\sigma(t) = E'\varepsilon(t) + \eta'D\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) d\varepsilon(\tau). \quad (49)$$

Накопленная и рассеянная энергии могут быть выражены через напряжение и деформацию или через деформацию и функцию релаксации. Рассмотрим последний член в формуле (41). Изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \psi(2t-\tau-\theta) d\sigma(\tau) d\sigma(\theta) = \\ &= \int_{-\infty}^t d\sigma(\tau) \left[\int_{-\infty}^{2t-\tau} \psi(2t-\tau-\theta) d\sigma(\theta) - \right. \\ &\quad \left. - \int_t^{2t-\tau} \psi(2t-\tau-\theta) d\sigma(\theta) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^t d\sigma(\tau) \int_{-\infty}^{2t-\tau} \psi(2t-\tau-\theta) d\sigma(\theta) - \\ &\quad - \int_t^{\infty} d\sigma(\theta) \int_{-\infty}^{2t-\theta} \psi(2t-\tau-\theta) d\sigma(\tau). \end{aligned}$$

Применение уравнения (40) дает

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^t d\sigma(\tau) \left[\varepsilon(2t-\tau) - \frac{1}{E} \sigma(2t-\tau) - \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{2t-\tau} \sigma(\theta) d\theta \right] - \\ &\quad - \int_t^{\infty} d\sigma(\theta) \left[\varepsilon(2t-\theta) - \frac{1}{E} \sigma(2t-\theta) - \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{2t-\theta} \sigma(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Теперь, полагая $2t-\theta=\tau$, найдем

$$\int_t^{\infty} \sigma(2t-\theta) d\sigma(\theta) = - \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\sigma(2t-\tau).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^t \sigma(2t - \tau) d\sigma(\tau) + \int_t^{\infty} \sigma(2t - \theta) d\sigma(\theta) = \\ = - \int_{-\infty}^t d[\sigma(\tau) \sigma(2t - \tau)] = -\sigma^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^t d\sigma(\tau) \int_{-\infty}^{2t-\tau} \sigma(\theta) d\theta + \int_t^{\infty} d\sigma(\theta) \int_{-\infty}^{2t-\theta} \sigma(\tau) d\tau = \\ = - \left[\sigma(\tau) \int_{-\infty}^{2t-\tau} \sigma(\theta) d\theta \right] \Big|_{\tau=-\infty}^t - \\ - \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) \sigma(2t - \tau) d\tau + \left[\sigma(\theta) \int_{-\infty}^{2t-\theta} \sigma(\tau) d\tau \right] \Big|_{\theta=t}^{\infty} + \\ + \int_t^{\infty} \sigma(\theta) \sigma(2t - \theta) d\theta = -2\sigma(t) \int_{-\infty}^t \sigma(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^t \varepsilon(2t - \tau) d\sigma(\tau) - \int_t^{\infty} \varepsilon(2t - \theta) d\sigma(\theta) - \\ - \frac{1}{E} \sigma^2 - \frac{2}{\eta} \sigma \int_{-\infty}^t \sigma(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

а также

$$2\sigma \int_{-\infty}^t \psi(t - \tau) d\sigma(\tau) = 2\sigma \left(\varepsilon - \frac{1}{E} \sigma - \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau \right).$$

Подставляя два последних выражения в соотношение (41), интегрируя последний член по частям, получаем

$$\begin{aligned} 2AV = 2\sigma\varepsilon - \int_{-\infty}^t \varepsilon(2t - \tau) d\sigma(\tau) + \int_t^{\infty} \varepsilon(2t - \theta) d\sigma(\theta), \\ 2AV = \sigma\varepsilon + \int_{-\infty}^t [\sigma(2t - \tau) d\varepsilon(\tau) - \varepsilon(2t - \tau) d\sigma(\tau)]. \quad (51) \end{aligned}$$

Зависимость (51) выражает накопленную энергию через напряжение и деформацию, но она может быть непосредственно использована только тогда, когда напряжение и деформация являются известными аналитическими функциями времени. Подобное соотношение может быть получено для рассеянной энергии

$$A\varphi = \sigma D\varepsilon + \int_{-\infty}^t \{ \varepsilon' (2t - \tau) d\sigma(\tau) - \sigma(2t - \tau) d\varepsilon'(\tau) \}, \quad (52)$$

где $\varepsilon'(\theta) = d\varepsilon(\theta)/d\theta$.

Если с помощью (49) исключить напряжение из (51) и (52), то можно показать, что в результате получим

$$2AV = E'\varepsilon^2 + \int_{-\infty}^t \int \chi(2t - \tau - \theta) d\varepsilon(\tau) d\varepsilon(\theta) \quad (53)$$

и

$$A\varphi = \eta'(D\varepsilon)^2 - \int_{-\infty}^t \int \chi'(2t - \tau - \theta) d\varepsilon(\tau) d\varepsilon(\theta), \quad (54)$$

где $\chi'(\theta) = d\chi(\theta)/d\theta$.

7. Синусоидальные колебания, комплексные модуль и податливость

В этом параграфе рассматривается вязко-упругий материал, подвергающийся действию напряжения, синусоидально колеблющегося с частотой ω . Предполагается, что объем материала достаточно мал, чтобы можно было пренебречь пространственным изменением напряжения. Таким образом,

$$\sigma_{ij} = \operatorname{Re} [\sigma_{ij}^0 e^{i\omega t}], \quad (55)$$

где σ_{ij}^0 — комплексные постоянные, $\operatorname{Re}[z]$ обозначают действительную часть z . После истечения времени, достаточного для того, чтобы можно было пренебречь влиянием начальных условий, деформация также будет иметь вид

$$\varepsilon_{ij} = \operatorname{Re} [\varepsilon_{ij}^0 e^{i\omega t}], \quad (56)$$

где ε_{ij}^0 — комплексные постоянные. Нормальные координаты ξ_i также изменяются синусоидально. Следовательно, предположение, сделанное при интегрировании уравнения (14), а именно $\xi_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, далее несправедливо и при анализе синусоидальных колебаний нужно вернуться вновь к уравнению (14).

Имеем

$$\xi_i = \operatorname{Re} [\xi_i^0 e^{i\omega t}], \quad (57)$$

где ξ_i^0 — комплексные постоянные. Подстановка значений σ_{ij} и ξ_i из формул (57) и (55) в уравнение (14), которое справедливо для любого момента времени, дает

$$\xi_i^0 = (1 - \Lambda^{(i)} + i\omega\kappa\Lambda^{(i)})^{-1} \sum_{m=1}^3 \gamma_{jk}^{(i)} \sigma_{jl}^0 a_l^{(m)} a_k^{(m)}. \quad (58)$$

Подстановка значений ε_{ij} и ξ_i формул (56) и (57) в выражение (11) дает

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^0 = \sum_{k=1}^M \gamma_{ij}^{(k)} \xi_k^0 = \sum_{k=1}^m (1 - \Lambda^{(i)} + i\omega\kappa\Lambda^{(i)})^{-1} \times \\ \times \sum_{m=1}^3 \gamma_{ij}^{(k)} \gamma_{pq}^{(k)} \sigma_{pl}^0 a_l^{(m)} a_q^{(m)}. \end{aligned}$$

Использование зависимостей (21), (23) и (15) дает

$$\varepsilon_{ij}^0 = \alpha \sigma_{ij}^0 - \beta \delta_{ij} \sigma_{kk}^0 + \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)}}{\lambda^{(b)} + i\omega} (\alpha^{(b)} \sigma_{ij}^0 - \beta^{(b)} \delta_{ij} \sigma_{kk}^0).$$

К этой деформации должна быть добавлена деформация за счет относительного движения молекул, которая определяется, согласно (1), в виде

$$e_{ij}^0 = \frac{1}{i\omega\eta} \sigma_{ij}^0.$$

Разделение суммарной деформации на девиатор и объемную деформацию дает

$$e_{ij}^0 = \left(\alpha + \frac{1}{i\omega\eta} + \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)} \alpha^{(b)}}{\lambda^{(b)} + i\omega} \right) \sigma_{ij}^0 \quad (59)$$

и

$$\varepsilon_{kk}^0 = \left(\gamma + \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)} \gamma^{(b)}}{\lambda^{(b)} + i\omega} \right) \sigma_{kk}^0. \quad (60)$$

Рассмотрим опять деформацию

$$\varepsilon^0 = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta} + \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)} B^{(b)}}{\lambda^{(b)} + i\omega} \right) \sigma^0, \quad (61)$$

которую можно считать любым компонентом девиатора деформации или объемной деформацией.

Комплексная податливость $J(i\omega)$ определяется как отношение ε^0/σ^0 . Следовательно,

$$J(i\omega) = \frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta} + \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)} B^{(b)}}{\lambda^{(b)} + i\omega}. \quad (62)$$

Комплексный модуль $Y(i\omega)$ определяется как отношение σ^0/ε^0 . Следовательно,

$$Y(i\omega) = (J(i\omega))^{-1} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta} + \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)} B^{(b)}}{\lambda^{(b)} + i\omega} \right)^{-1}.$$

Применяя лемму и следствия из § 5 и обозначения (45) и (46), найдем

$$Y(i\omega) = E' + i\omega\eta' + \sum_{r=1}^{N'} \frac{C^{(r)} i\omega}{\mu^{(r)} + i\omega}. \quad (63)$$

Таким образом, получаем следующий результат.

„Комплексные податливости и комплексные модули, соответствующие компонентам девиатора и объемной деформации линейных изотропных вязко-упругих материалов, имеют чередующиеся нули и полюсы, которые все лежат

на положительной мнимой оси. Всегда существует ближайший к началу координат полюс податливости, а для податливости, соответствующей девиатсру жидкости, этот полюс совпадает с началом координат¹⁾.

Сравнивая выражение (45) с формулой (62), зависимость (46) с соотношением (63), замечаем, что

$$J(i\omega) = \frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta} + \bar{\psi}'^F \quad (64)$$

и

$$Y(i\omega) = E' + i\omega\eta' + \bar{\chi}'^F, \quad (65)$$

где $\bar{\psi}'^F$ — преобразование Фурье¹⁾ производной $d\psi(t)/dt$, а $\bar{\chi}'^F$ — преобразование Фурье производной $d\chi(t)/dt$. Формулы (64) и (65) были впервые получены Гроссом [5].

Найдем теперь накопленную и рассеянную энергии при синусоидальных колебаниях. Из (57) имеем

$$\zeta_i^2 = \frac{1}{2} \zeta_i^0 \bar{\zeta}_i^0 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\zeta_i^0)^2 e^{2i\omega t}], \quad (66)$$

где $\bar{\zeta}_i^0$ обозначает величину, комплексно-сопряженную с ζ_i^0 .

Обращаясь к формуле (12), замечаем, что накопленная энергия V состоит из двух частей: одна часть постоянна, а другая часть изменяется синусоидально с частотой, разной 2ω . Применяя теперь формулу (58), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda(i)=\Lambda(b)} \zeta_{i\bar{i}}^{0\bar{0}} (1 - \Lambda^{(i)}) &= (1 - \Lambda^{(b)}) \{ (1 - \Lambda^{(b)})^2 + \omega^2 \kappa^2 (\Lambda^{(b)})^2 \}^{-1} \times \\ &\times \sum_{\Lambda(i)=\Lambda(b)} \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sigma_{jl}^0 \sigma_{pr}^0 \gamma_{jk}^{(i)} \gamma_{pq}^{(i)} a_l^{(m)} a_k^{(m)} a_q^{(n)} a_r^{(n)}. \end{aligned}$$

¹⁾ Преобразование Фурье определяется обычным образом:

$$\bar{x}^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}^F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Использование (15), (21) и (23) дает

$$\sum_{\Lambda^{(i)}=\Lambda^{(b)}} \zeta_{i\bar{i}}^{0\bar{0}} (1 - \Lambda^{(i)}) = \\ = \frac{\lambda^{(i)2}}{\lambda^{(i)2} + \omega^2} (\alpha^{(b)} \sigma_{ij}^0 \bar{\sigma}_{ij}^0 - \beta^{(b)} \sigma_{ii}^0 \bar{\sigma}_{jj}^0), \quad \Lambda^{(b)} > 0, \quad (67)$$

$$\sum_{\Delta^{(i)}=\Lambda^{(b)}} \zeta_{i\bar{i}}^{0\bar{0}} = \alpha \sigma_{ij}^0 \bar{\sigma}_{ij}^0 - \beta \sigma_{ii}^0 \bar{\sigma}_{jj}^0, \quad \Lambda^{(b)} = 0, \quad (68)$$

$$\sum_{\Lambda^{(i)}=\Lambda^{(b)}} \operatorname{Re} [(\zeta_i^0)^2 e^{2i\omega t}] = \\ = \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda^{(b)2}}{(\lambda^{(b)} + i\omega)^2} (\alpha^{(b)} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 - \beta^{(b)} \sigma_{ii}^0 \sigma_{jj}^0) e^{2i\omega t} \right], \quad \Lambda^{(b)} > 0, \quad (69)$$

и

$$\sum_{\Lambda^{(i)}=\Lambda^{(b)}} \operatorname{Re} [(\zeta_i^0)^2 e^{2i\omega t}] = \\ = \operatorname{Re} [(\alpha \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 - \beta \sigma_{ii}^0 \sigma_{jj}^0) e^{2i\omega t}], \quad \Lambda^{(b)} = 0. \quad (70)$$

Накопленную энергию можно опять разделить на части, соответствующие девиатору и объемной деформации. Ниже мы выпишем типичный вид этих частей.

Комплексная податливость $J(i\omega)$ может быть представлена в виде суммы действительной и отрицательной мнимой частей,

$$J(i\omega) = J_1(\omega) - iJ_2(\omega), \quad (71)$$

где $J_1(\omega)$ и $J_2(\omega)$ — действительные функции угловой частоты ω . Из (62) имеем

$$J_1(\omega) + \frac{1}{E} + \sum_{b=1}^N \frac{(\lambda^{(b)})^2 B^{(b)}}{(\lambda^{(b)})^2 + \omega^2} \quad (72)$$

и

$$J_2(\omega) = \frac{1}{\omega\eta} + \omega \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)} B^{(b)}}{(\lambda^{(b)})^2 + \omega^2}. \quad (73)$$

Подстановка из формул (12), (62) и (66) в уравнение (70) дает

$$4AV = J_1 |\sigma^0|^2 + \operatorname{Re} \{ [J(i\omega) + i\omega J'(i\omega)] |\sigma^0|^2 e^{2i\omega t} \}, \quad (74)$$

где, как и раньше, $A = 1$ для компонент девиатора, $A = 3$ для объемной деформации и $J'(i\omega) = dJ(i\omega)/d(i\omega)$. Если $\sigma^0 = |\sigma^0|e^{i\alpha}$, то из уравнений (71) — (74) получим

$$4AV = J_1 |\sigma^0|^2 + |\sigma^0|^2 [J_1 + \omega J'_1(\omega)] \cos 2(\omega t + \alpha) + \\ + |\sigma^0|^2 [J_2 + \omega J'_2(\omega)] \sin 2(\omega t + \alpha). \quad (75)$$

Подобным же образом можно показать, что

$$2A\varphi = \omega J_2 |\sigma^0|^2 - \omega^2 \operatorname{Re} [J'(i\omega) (\sigma^0)^2 e^{2i\omega t}] \quad (76)$$

или

$$2A\varphi = \omega J_2 |\sigma^0|^2 - \omega^2 |\sigma^0|^2 J'_2(\omega) \cos 2(\omega t + \alpha) + \\ + \omega^2 |\sigma^0|^2 J'_1(\omega) \sin 2(\omega t + \alpha). \quad (77)$$

Заметим, что только постоянные части накопленной и рассеянной энергий при синусоидальных колебаниях определяются комплексной податливостью при данной частоте. Для определения переменных частей необходимо знать производную податливости.

8. Операционная форма зависимости между напряжением и деформацией

Зависимость между напряжением и деформацией в форме, которую дает (24), была получена интегрированием уравнений (14) и последующей подстановкой значения ζ_i в формулу (11). Операционная форма получается исключением ζ_i из уравнения (14) и выражения (11) без предварительного интегрирования уравнения (14). Дифференциальные уравнения задач являются линейными с постоянными коэффициентами, следовательно, оператор D можно считать алгебраическим символом в последующих операциях, за исключением уравнений, которые в конце концов интегрируются. Сравнение уравнений (58) с уравнениями (14) показывает, что единственное различие состоит в том, что $i\omega$ заменяет D , а ζ_i^0 заменяет ζ_i . Следовательно, (61) есть операционная форма зависимости между напряжением и деформацией, получаемая соответственно заменой $i\omega$ на D и ε^0 и σ^0 на ε и σ , т. е.

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta D} + \sum_{b=1}^N \frac{\lambda^{(b)} B^{(b)}}{\lambda^{(b)} + D} \right) \sigma. \quad (78)$$

Приведение к общему знаменателю дает

$$E \prod_{b=1}^N (D + \lambda^{(b)}) D \varepsilon = F_{N+1}(D) \sigma, \quad (79)$$

где F_{N+1} обозначает многочлен от D степени $N+1$ с постоянными коэффициентами и с коэффициентом при D^{N+1} , равным единице. Из (78) с помощью леммы § 5 получим

$$\sigma = \left(\sum_{r=1}^{N+1} \frac{C^{(r)} D}{D + \mu^{(r)}} \right) \varepsilon, \quad \text{если } \frac{1}{E} \neq 0 \text{ и } \frac{1}{\eta} \neq 0, \quad (80)$$

и приведение к общему знаменателю дает

$$\prod_{r=1}^{N+1} (D + \mu^{(r)}) \sigma = F_N(D) \varepsilon, \quad (81)$$

где $F_N(D)$ — многочлен степени N от D и коэффициент при D^N равен $\sum_{r=1}^{N+1} C^{(r)}$. Так как уравнения (79) и (81) подобны, то они равносильны уравнению

$$E \prod_{b=1}^N (D + \lambda^{(b)}) D \varepsilon = \prod_{r=1}^{N+1} (D + \mu^{(r)}) \sigma, \quad \frac{1}{E} \neq 0 \text{ и } \frac{1}{\eta} \neq 0. \quad (82)$$

Для других случаев имеют место следующие уравнения:

$$E \prod_{b=1}^N (D + \lambda^{(b)}) \varepsilon = \prod_{r=1}^N (D + \mu^{(r)}) \sigma, \quad \frac{1}{E} \neq 0 \text{ и } \frac{1}{\eta} = 0; \quad (83)$$

$$\eta' \prod_{b=1}^N (D + \lambda^{(b)}) D \varepsilon = \prod_{r=1}^N (D + \mu^{(r)}) \sigma, \quad \frac{1}{E} = 0 \text{ и } \frac{1}{\eta} \neq 0; \quad (84)$$

$$\eta' \prod_{b=1}^{N+1} (D + \lambda^{(b)}) \varepsilon = \prod_{r=1}^N (D + \mu^{(r)}) \sigma, \quad \frac{1}{E} = 0 \text{ и } \frac{1}{\eta} = 0. \quad (85)$$

Все четыре случая можно объединить следующим образом.

Зависимость между напряжением и деформацией для линейного вязко-упругого материала может быть выражена в форме

$$P\sigma = Q\varepsilon, \quad (86)$$

где P и Q — многочлены с постоянными коэффициентами от оператора $D \equiv d/at$. Все корни многочленов действительные, неположительные и чередующиеся. Наименьший по абсолютной величине корень есть корень многочлена Q . Отношение любого коэффициента многочлена P к любому коэффициенту многочлена Q положительно. Указанные выше четыре случая соответствуют следующим случаям: наименьший корень многочлена равен нулю (при $1/\eta \neq 0$); наименьший корень многочлена не равен нулю (при $1/\eta = 0$); наибольший по абсолютной величине корень есть корень многочлена P (при $1/E \neq 0$); наибольший по абсолютной величине корень есть корень многочлена Q (при $1/E = 0$).

Заметим, что если σ и ε , согласно (55) и (56), изменяются синусоидально, то

$$J(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \text{ и } Y(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)}, \quad (87)$$

где $P(i\omega)$ и $Q(i\omega)$ — те же самые функции от $i\omega$, что и функции $P(D)$ и $Q(D)$ от D .

Накопленная и рассеянная энергии могут быть представлены как однородные квадратичные функции напряжения, деформации и их производных в данный момент времени. Уравнение (35) может быть написано в виде

$$2AV = \frac{1}{E} \sigma^2 + \sum_{b=1}^N B^{(b)} (F^{(b)})^2, \quad (88)$$

где

$$F^{(b)} = \int_{-\infty}^t (1 - e^{-\lambda^{(b)}(t-r)}) d\sigma(\tau). \quad (89)$$

Зависимость (34) в этих обозначениях принимает вид

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma + \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau + \sum_{b=1}^N B^{(b)} F^{(b)}. \quad (90)$$

Из интеграла (89) имеем

$$DF^{(b)} = \lambda^{(b)} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda^{(b)}(t-r)} d\sigma(\tau). \quad (91)$$

Следовательно,

$$DF^{(b)} = \lambda^{(b)} \sigma - \lambda^{(b)} F^{(b)}. \quad (92)$$

Если выражение (90) продифференцировать по времени и исключить $DF^{(b)}$ с помощью (91), то получим

$$D\varepsilon = \frac{1}{E} D\sigma + \frac{1}{\eta} \sigma + \sum_{b=1}^N B^{(b)} \lambda^{(b)} \sigma - \sum_{b=1}^N B^{(b)} \lambda^{(b)} F^{(b)}.$$

Повторяя дифференцирование $n-1$ раз и исключая после каждого дифференцирования $DF^{(b)}$, с помощью (91) найдем

$$\begin{aligned} D^n \varepsilon = & \frac{1}{E} D^n \sigma + \frac{1}{\eta} D^{n-1} \sigma + \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{b=1}^N (-1)^{n-m-1} B^{(b)} (\lambda^{(b)})^{n-m} D^m \sigma + \\ & + (-1)^n \sum_{b=1}^N B^{(b)} (\lambda^{(b)})^n F^{(b)}. \end{aligned} \quad (93)$$

Если $1/\eta = 0$, то зависимость (90) и уравнения (93) для $n = 1, 2, 3, \dots, N = 1$ дают N уравнений, из которых можно найти N значений $F^{(b)}$. Определитель коэффициентов при неизвестных $F^{(b)}$ равен

$$\pm \prod_{\substack{r, s=1 \\ r > s}}^N (\lambda^{(r)} - \lambda^{(s)}).$$

(Этот определитель не равен нулю, так как $\lambda^{(b)}$ — особые значения.) Если $1/\eta \neq 0$, то уравнения (93) для $n = 1, 2, 3, \dots, N$ дают N уравнений для N величин $F^{(b)}$. Так как $B^{(b)}$ и $\lambda^{(b)}$ могут быть выражены через коэффициенты многочленов P и Q , то функция $F^{(b)}$ может быть представлена линейной однородной функцией от σ , ε и их производных по времени с коэффициентами, которые

являются функциями коэффициентов многочленов P и Q . Подстановка значения $F^{(b)}$ в формулу (88) дает накопленную энергию V в виде однородной квадратичной функции от σ , ε и их производных с коэффициентами, которые являются функциями коэффициентов многочленов P и Q .

Из (36) и (92) имеем

$$A\varphi = \frac{1}{\eta} \sigma^2 + \sum_{b=1}^N \frac{B^{(b)}}{\lambda^{(b)}} (DF^{(b)})^2. \quad (94)$$

Дифференцирование соотношения (90) дает

$$D\varepsilon = \frac{1}{E} D\sigma + \frac{1}{\eta} \sigma + \sum_{b=1}^N B^{(b)} DF^{(b)}.$$

Подставив значение $DF^{(b)}$ из уравнения (92) и дифференцируя полученное уравнение $n-1$ раз, получим для $DF^{(b)}$ уравнения, аналогичные уравнениям (93) для $F^{(b)}$. Значения $DF^{(b)}$, найденные из решения этих уравнений, могут быть подставлены в выражение (94). Таким образом, рассеянная энергия φ представляется однородной квадратичной функцией от σ , ε и их производных по времени с коэффициентами, которые являются функциями коэффициентов многочленов P и Q .

Из сравнения уравнений (82) — (85) видно, что производные от σ и ε , которые входят в уравнения для V и φ , те же самые производные, которые входят в уравнение $P\sigma = Q\varepsilon$, за исключением производных высшего порядка от σ и ε . Исключения из этого правила имеются только для самых простых видов зависимости $P\sigma = Q\varepsilon$, когда $N=0$ и метод последовательного дифференцирования и подстановок не требуется. Эти три исключения следующие:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \sigma = \eta D\varepsilon \quad \text{и} \quad \frac{1}{E} D\sigma + \frac{1}{\eta} \sigma = D\varepsilon.$$

9. Модельное представление

Зависимость между напряжением и деформацией часто бывает удобно для наглядности представить моделями. Двумя основными элементами служат пружина и аморти-

затор, которым соответствуют следующие виды связи между напряжением и деформацией:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{и} \quad \sigma = \eta D\varepsilon.$$

Зависимость между напряжением и деформацией для любой модели, которая является одномерной сеткой основных элементов, получается с помощью следующего правила: „Если две модели соединены последовательно, то напряжение в каждой модели равно общему напряжению, а общая деформация равна сумме деформаций отдельных моделей; если две модели соединены параллельно, то деформация каждой модели равна общей деформации, а общее напряжение равно сумме напряжений в отдельных моделях.

Заметим, что эти элементы не идентичны элементам микроскопической сетки, рассмотренным ранее. Элементы микроскопической сетки приводят к зависимости между силой и удлинением, а модели, рассматриваемые в этом параграфе, приводят к связи между напряжением и деформацией. Модель, построенная из двух последовательно соединенных основных элементов, называется *элементом Максвелла*, которому соответствует соотношение между напряжением и деформацией вида

$$D\varepsilon = \frac{1}{E} D\sigma + \frac{1}{\eta} \sigma.$$

Модель, построенная из двух параллельно соединенных основных элементов, называется *элементом Фойгта*, которому соответствует следующая форма связи между напряжением и деформацией:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta D\varepsilon.$$

Полезность модельного представления теперь очевидна, так как из выражений (78), (88) и (94) видно, что механические свойства, а также накопленная и рассеянная энергии любого линейного вязко-упругого материала могут быть представлены элементами Фойгта, соединенными последовательно, или элементами Максвелла, соединенными

параллельно¹⁾. Полученное таким образом наглядное представление часто используется для описания сопротивления материала приложенной силе или перемещению. Формулы для накопленной и рассеянной энергий для восьми простейших моделей даны в табл. 1.

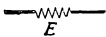
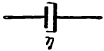
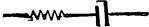
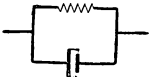
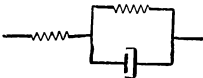
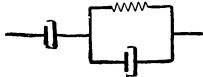
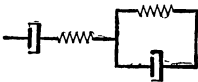
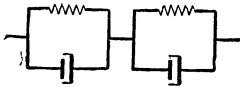
Различные авторы применяют разные названия для простых моделей. Например, элемент Фойгта называется иногда элементом Фойгта—Кельвина или просто элементом Кельвина. По терминологии, предложенной Джеффрисом [6], материал, который имеет упругую объемную деформацию, а девиатору которого соответствует модель Максвелла, называется упруго-вязким; материал, который имеет упругую объемную деформацию, а девиатору которого соответствует модель Фойгта, называется „твёрдо-вязким“. Джеффрис рассмотрел также материал, который имеет упругую объемную деформацию, а девиатору соответствует трехэлементная упругая модель; этот материал служит моделью упругого последействия.

Модели, которые были рассмотрены в гл. 1, можно считать частным случаем моделей, зависимости между напряжением и деформацией которых соответствуют одномерной задаче.

Если стержень, для которого справедливо выражение (37а), имеет площадь поперечного сечения A и длину L , то растягивающая сила равна $F = \sigma_{11}A$, а удлинение стержня равно $a = \epsilon_{11}L$. Таким образом, σ_{11} и ϵ_{11} могут быть исключены из (37а), это дает зависимость между силой и удлинением для стержня, т. е. зависимость того типа, которая выводится в гл. 1. Так как правила для последовательного и параллельного соединений моделей одинаковы в обоих случаях, то каждая модель, описывающая связь между силой и удлинением, будет такой же, как и модель, представляющая зависимость между напряжением и деформацией. Постоянные последней модели получаются из постоянных первой модели умножением на постоянную величину A/L . Обратно, для каждой модели из гл. 1 существуют механически эквивалентные вязко-

¹⁾ Ранее не было показано, что элементы Максвелла, соединенные параллельно, могут характеризовать накопленную и рассеянную энергии материала.

Накопленная и рассеянная

Зависимость между напряжением и деформацией	Схема модели (общая, но не единственная)
$\sigma = E\varepsilon$, упругий материал	
$\sigma = \eta D\varepsilon$, вязкий материал	
$\frac{1}{E} D\sigma + \frac{1}{\eta} \sigma = D\varepsilon$, материал Максвелла	
$\sigma = \eta D\varepsilon + E\varepsilon$, материал Фойгта	
$p_1 D\sigma + p_0\sigma = q_1 D\varepsilon + q_0\varepsilon$, трех- элементная упругая модель	
$p_1 D\sigma + p_0\sigma = q_2 D^2\varepsilon + q_1 D\varepsilon$, трехэлементная вязкая модель	
$p_2 D^2\sigma + p_1 D\sigma + p_0\sigma =$ $= q_2 D^2\varepsilon + q_1 D\varepsilon$, четырехэле- ментная модель 1-го типа	
$p_1 D\sigma + p_0\sigma = q_2 D^2\varepsilon + q_1 D\varepsilon + q_0\varepsilon$, четырёхэлементная модель 2-го типа	

энергии для восьми простейших моделей

Накопленная энергия V	Скорость рассеяния Φ
$\frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2E} \sigma^2$	0
0	$\eta (D\epsilon)^2 = \frac{1}{\eta} \sigma^2$
$\frac{1}{2E} \sigma^2$	$\frac{1}{\eta} \sigma^2$
$\frac{1}{2} E \epsilon^2$	$\eta (D\epsilon)^2$
$\frac{p_0 p_1 \sigma^2 - 2 p_1 q_0 \sigma \epsilon + q_0 q_1 \epsilon^2}{2 (p_0 q_1 - p_1 q_0)}$	$\frac{p_0^2 \sigma^2 - 2 p_0 q_0 \sigma \epsilon + q_0^2 \epsilon^2}{p_0 q_1 - p_1 q_0}$
$\frac{p_1^2 \sigma^2 - 2 p_1 q_2 \sigma D\epsilon + q_2^2 (D\epsilon)^2}{2 (p_1 q_1 - p_0 q_2)}$	$\frac{p_0 p_1 \sigma^2 - 2 p_0 q_2 \sigma D\epsilon + q_1 q_2 (D\epsilon)^2}{p_1 q_1 - p_0 q_2}$
$\{ (p_1^2 q_2 - p_0 p_2 q_2 + p_1 p_2 q_1) \sigma^2 +$ $+ p_2^2 q_2 (D\sigma)^2 + q_2^3 (D\epsilon)^2 +$ $+ 2 p_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) \sigma D\sigma -$ $- 2 p_2 q_2^2 D\sigma D\epsilon -$ $- 2 q_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) \sigma D\epsilon \} \times$ $\times \{ 2 (p_1 q_2 q_1 - p_2 q_1^2 - p_0 q_2^2) \}^{-1}$	$\{ p_0 (p_1 q_2 - p_2 q_1) \sigma^2 +$ $+ p_2^2 q_1 (D\sigma)^2 + q_1 q_2^2 (D\epsilon)^2 +$ $+ 2 p_0 p_2 q_2 \sigma D\sigma -$ $- 2 p_2 q_1 q_2 D\sigma D\epsilon -$ $- 2 p_0 q_2^2 D\epsilon \} \times$ $\times \{ p_1 q_2 q_1 - p_2 q_1^2 - p_0 q_2^2 \}^{-1}$
$\{ p_0 p_1^2 \sigma^2 + p_0 q_2^2 (D\epsilon)^2 +$ $+ q_0 (p_1 q_1 - p_0 q_2) \epsilon^2 -$ $- 2 p_0 p_1 q_2 \sigma D\epsilon - 2 p_1^2 q_0 \sigma \epsilon +$ $+ 2 p_1 q_0 q_2 \epsilon D\epsilon \} \times$ $\times \{ 2 (p_0 p_1 q_1 - p_0^2 q_2 - p_1^2 q_0) \}^{-1}$	$\{ p_0^2 p_1 \sigma^2 + q_2 (p_0 q_1 - p_1 q_0) (D\epsilon)^2 +$ $+ p_1 q_0^2 \epsilon^2 - 2 p_0^2 q_2 \sigma D\epsilon -$ $- 2 p_0 p_1 q_0 \sigma \epsilon + 2 p_0 q_0 q_2 \epsilon D\epsilon \} \times$ $\times \{ p_0 p_1 q_1 - p_0^2 q_2 - p_1^2 q_0 \}^{-1}$

упругие стержни, для которых единственным образом определяется зависимость между напряжением и деформацией при растяжении и зависимость отношения площади поперечного сечения к длине.

10. Спектры запаздывания и релаксации

В предыдущих параграфах предполагалось, что число узлов внутри каждого ящика, определяемых гипотезой 1, конечно и равно n . Исследуем теперь, что произойдет, если $n \rightarrow \infty$.

Для любого сколь угодно большого n анализ, данный в предыдущих параграфах остается справедливым. Возможны четыре типа распределения $\lambda^{(b)}$ в интервале $0 < \lambda^{(b)} < \infty$, когда $n \rightarrow \infty$, а именно: 1) число $\lambda^{(b)}$ остается конечным; это случай, совпадающий со случаем, когда n конечно; 2) число $\lambda^{(b)}$ стремится к бесконечности, но существует такое $\varepsilon > 0$, что $|\lambda^{(b)} - \lambda^{(c)}| > \varepsilon$ для любых двух $\lambda^{(b)}$ и $\lambda^{(c)}$; 3) число $\lambda^{(b)}$ стремится к бесконечности и для любого данного $\varepsilon > 0$ и любого $\lambda^{(b)}$ можно выбрать достаточно большое n , чтобы существовало такое $\lambda^{(c)}$, чтобы $|\lambda^{(b)} - \lambda^{(c)}| < \varepsilon$; 4) число $\lambda^{(b)}$ стремится к бесконечности так, что второе условие в случае 2) справедливо на части интервала $0 < \lambda^{(b)} < \infty$, а второе условие случая 3) справедливо на оставшейся части интервала.

В случае 3) бесконечная сумма в (39) заменяется интегралом, когда $n \rightarrow \infty$. Интегрирование производится по переменной $1/\lambda$, которая называется *временем запаздывания*. Имеем

$$\psi(t) = \int_{\frac{1}{\lambda}=0}^{\infty} j\left(\frac{1}{\lambda}\right) [1 - e^{-\lambda t}] d\left(\frac{1}{\lambda}\right) H(t), \quad (95)$$

где функция $j(1/\lambda)$ называется *функцией распределения времен запаздывания* или *спектром запаздывания*. Подобным же образом из выражения (48), в случае 3),

при $n \rightarrow \infty$ получим

$$\chi(t) = \int_{\frac{1}{\mu}=0}^{\infty} y\left(\frac{1}{\mu}\right) e^{-\mu t} d\left(\frac{1}{\mu}\right) H(t), \quad (96)$$

где $1/\mu$ называется *временем релаксации*, а $y(1/\mu)$ называется *функцией распределения времен релаксации* или *спектром релаксации*. Функции распределения $j(1/\lambda)$ и $y(1/\mu)$ должны быть действительными и неотрицательными для всех действительных и неотрицательных значений их аргументов,

В случае 1) функции распределения $j(1/\lambda)$ и $y(1/\mu)$ являются конечными суммами дельта-функций Дирака, а в случае 2) они будут бесконечными суммами дельта-функций. В случае 4) функции распределения можно разделить на две части, из которых одна будет суммой дельта-функций. Во всех случаях применимы формулы (41), (53) и (75) для накопленной энергии и (42), (54) и (77) для рассеянной энергии. В этом параграфе содержится два примера: один пример для случая 2), а другой для случая 3). Для каждого случая будут найдены различные вязко-упругие функции.

Пример 1

Рассмотрим зависимость вида

$$\frac{1}{\Gamma\left(D + \frac{1}{2}\right)} \sigma = \frac{K}{\Gamma(D)} \epsilon, \quad (97)$$

где Γ — гамма-функция, K — положительная постоянная. Так как

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{yz} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right],$$

то функция $\Gamma(z)$ аналитична для всех конечных значений z и имеет нули при $z = 0, -1, -2, -3 \dots$. Подобным же образом функция $1/\Gamma(z + 1/2)$ аналитична для всех конечных значений z и имеет нули при $z = -1/2, -3/2, -5/2, \dots$. Обе функции $1/\Gamma(z)$ и $1/\Gamma(z + 1/2)$ могут быть разложены в бесконечные ряды по целым степеням z . Положим $P = 1/\Gamma(D + 1/2)$ и $Q = K/\Gamma(D)$, тогда ясно, что (97) определяет зависимость между напря-

жением и деформацией для вязко-упругого материала потому, что все условия, определяемые соотношением (86), удовлетворяются. Так как наименьший по абсолютной величине корень многочлена Q равен нулю, следует ожидать, что материал будет иметь установившееся вязкое течение. Так как не известно, какой из многочленов P или Q содержит наибольший по абсолютной величине корень, то остается не решенным вопрос, имеет ли материал мгновенную упругую деформацию. Зависимость (97) служит примером для случая 2).

Функция ползучести определяется как деформация, возникающая при приложении к материалу напряжения $H(t)$; она не включает в себя мгновенную упругую деформацию и деформацию, определяющуюся установившимся течением. Так как σ и ϵ оба равны нулю при $t < 0$ и так как $1/\Gamma(D + 1/2)$ и $1/\Gamma(D)$ могут быть разложены в бесконечные ряды по целым степеням D , то применение двустороннего преобразования Лапласа к (97) дает

$$\frac{1}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \bar{\sigma} = \frac{K}{\Gamma(p)} \bar{\epsilon}. \quad (98)$$

В этом случае $\bar{\sigma} = 1/p$. Используем зависимость

$$\frac{\Gamma(z) \Gamma(a+1)}{\Gamma(z+a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a(a-1)(a-2) \dots (a-n)}{n!} \frac{1}{z+n}, \quad a > 0, \quad (99)$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Gamma(p)}{K p \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{K \sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{p(p+n)}.$$

Следовательно,

$$\epsilon(t) = \frac{1}{K \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 n} [1 - e^{-nt}] H(t) + \frac{1}{K \sqrt{\pi}} t H(t)$$

и

$$\psi(t) = \frac{1}{K \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 n} [1 - e^{-nt}] H(t). \quad (100)$$

Материал имеет деформацию установившегося течения, величина которой равна $\varepsilon(t) = 1/\eta H(t)$, где

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{K\sqrt{\pi}}, \quad (101)$$

но не имеет мгновенной упругости, так как $\varepsilon(t) = 0$ при $t = 0$ и, следовательно, $1/E = 0$.

Для того чтобы найти функцию релаксации, в (98) положим $\bar{\varepsilon} = 1/p$. Применяя соотношение (99), найдем

$$\bar{\sigma} \frac{K\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{p\Gamma(p)} = \frac{K\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{1}{p + \frac{1}{2} + n}$$

и

$$\sigma(t) = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)t} H(t).$$

Следовательно,

$$\chi(t) = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)t} H(t) \quad (102)$$

и

$$\eta' = E' = 0. \quad (103)$$

Для материала, обладающего только конечным числом $\lambda^{(b)}$, условие $1/E = 0$ означает, что $\eta' \neq 0$. Этот случай не подходит для рассматриваемого материала. Но можно показать, что $\chi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +0$. Таким образом, для данного материала напряжение имеет особенность, когда приложена деформация $H(t)$; эта особенность типа дельта-функции.

Комплексная податливость и комплексный модуль определяются соответственно формулами

$$J(i\omega) = \frac{\Gamma(i\omega)}{K\Gamma\left(i\omega + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{и} \quad Y(i\omega) = \frac{K\Gamma\left(i\omega + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(i\omega)}. \quad (104)$$

Пример 2

Рассмотрим функцию ползучести вида

$$\psi(t) = \frac{t^\nu}{K\Gamma(1+\nu)} H(t), \quad \text{где } 0 \leq \nu \leq 1 \text{ и } K > 0. \quad (105)$$

Если $\nu=0$, то функция ползучести соответствует упругому телу, если $\nu=1$, то функция ползучести соответствует вязкой жидкости. Для того чтобы показать, что функция ползучести, определяемая уравнением (105), соответствует линейному вязко-упругому материалу, достаточно показать, что существует соответствующий неотрицательный спектр запаздывания. Если уравнение (95) продифференцировать по времени, то

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} j\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} d\lambda H(t).$$

Можно заметить, что $1/\lambda \, j(1/\lambda)$ есть обращение одно-стороннего преобразования Лапласа (не умноженного на p) производной $d\psi(t)/dt$. Дифференцирование зависимости (105) по времени дает

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{t^{\nu-1}}{K\Gamma(\nu)} H(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} j\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{\lambda^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{K\Gamma(\nu)}, \\ j\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{\lambda^{1-\nu}}{K\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu)}. \end{aligned} \quad (106)$$

Таким образом, $j(1/\lambda) > 0$ для $0 < \lambda < \infty$ и, следовательно, формула (105) представляет функцию ползучести линейного вязко-упругого материала. Этот пример соответствует случаю 3).

Если предположить, что материал не имеет мгновенной упругости и установившегося течения, то зависимость между напряжением и деформацией, согласно (40), может быть написана в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{K\Gamma(1+\nu)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^\nu d\sigma(\tau),$$

или, после интегрирования по частям, найдем

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{K\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) (t - \tau)^{\nu-1} d\tau.$$

Используя определение интеграла дробного порядка $D^{-n}f(t)$ в виде (7)

$$D^{-n}f(t) = \int_{-\infty}^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(\tau) d\tau,$$

имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{K} D^{-\nu} \sigma(t)$$

или

$$\sigma = KD^{\nu} \varepsilon. \quad (107)$$

Этот тип зависимости между напряжением и деформацией был предложен Скотт-Блэром.

Другая форма, соответствующая (107), имеет вид

$$\sigma(t) = KD^{-(1-\nu)} D\varepsilon = \frac{K}{\Gamma(1-\nu)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{-\nu} d\varepsilon(\tau). \quad (108)$$

Отсюда найдем функцию релаксации

$$\chi(t) = \frac{K}{\Gamma(1-\nu)} t^{-\nu} H(t), \quad (109)$$

а применяя операции, подобные тем, которые использовались при выводе (106), получаем спектр релаксации

$$y\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{K}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \mu^{\nu+1}. \quad (110)$$

Комплексные модуль и податливость соответственно равны

$$Y(i\omega) = K(i\omega)^{\nu}, \quad (111)$$

$$J(i\omega) = \frac{1}{K}(i\omega)^{-\nu}. \quad (112)$$

Заметим, что $Y(i\omega) = -\arg J(i\omega) = \nu\pi/2$ не зависит от частоты ω .

11. Краткое изложение результатов главы 2

Свойства линейного вязко-упругого материала основываются на гипотезах, состоящих в том, что микро-скопическая структура таких материалов механически эквивалентна сетке упругих и вязких элементов.

Накопленная энергия и скорость рассеивания энергии могут быть найдены для любого материального элемента в любое время. Для изотропного материала каждый компонент девиатора деформации зависит только от соответствующего компонента девиатора напряжения, а объемная деформация зависит только от гидростатического напряжения. Накопленная и рассеянная энергии являются суммами соответствующих энергий для компонентов девиатора и для объемной деформации. Показано, что деформация может быть выражена через приращение напряжения и функцию ползучести, а напряжение может быть выражено через приращение деформации и функцию релаксации. Комплексные податливости и модули имеют чередующиеся нули и полюсы на положительной мнимой оси и не имеют нулей и полюсов где-нибудь в другом месте. Зависимость между напряжением и деформацией может быть выражена в операционной форме в виде $P\sigma = Q\epsilon$, где P и Q — многочлены от d/dt с постоянными коэффициентами. Все нули P и Q действительные, неположительные и чередующиеся.

Энергии могут быть представлены через функцию ползучести и напряжение за предыдущее время, или через функцию релаксации и деформацию за предыдущее время, или через напряжение, деформацию и их производные в данное время, или, для синусоидальных колебаний, через комплексную податливость и ее производную по частоте. Показано, что модели, состоящие из элементов Фойгта, соединенных последовательно, или элементов Максвелла, соединенных параллельно, могут представлять механические свойства и накопленную и рассеянную энергии любого вязко-упругого материала.

Анализ может быть распространен на сетки, содержащие бесконечное число элементов. Даны два примера, один из которых включает два различных случая.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bland D. R., On foundations of linear isotropic visco-elasticity, *Proc. Roy. Soc.*, **A250**, № 1263, 524—549 (1959).
2. Bragg W. L., Lomar M., A dynamical model of crystal structure, *Proc. Roy. Soc.*, **A196**, № 1045, 171 (1949).
3. Jeffreys H., Cartesian tensors, p. 70, equation 20, Cambridge University Press, 1931.
4. Bland D. R., *Rheologica acta*, to be published.
5. Gross B., On creep and relaxation, *J. Appl. Phys.*, **19**, № 3, 257—264 (1948).
6. Jeffreys H., *The Earth*, Third Edition (Cambridge University Press, 1952, section 1.04). (Русский перевод: Джеффрис Г., *Земля, ее происхождение, история и строение*, ИЛ, М., 1960.)
7. Widder D. V., *The Laplace transform* (p. 71, Princeton University Press, 1946).

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ I. ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

1. Анализ напряженного состояния в теории вязко-упругости

Предыдущая глава посвящена зависимости между напряжением и деформацией для вязко-упругого материала. Эта глава и две следующие касаются определения полей напряжений и перемещений в вязко-упругих телах. Эти поля возникают, когда на тела действуют внешние силы и связи. Определение полей напряжений и перемещений — задача анализа напряженного состояния.

Анализ напряженного состояния в механике сплошной среды связан с совместным решением трех групп зависимостей, удовлетворяющих данным граничным условиям. Первая группа уравнений получается из чисто геометрического анализа деформаций и дается в двух формах: 1) соотношения, связывающие деформацию и перемещение, которые для малых деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (1)$$

где u_i — перемещение, и 2) соотношения, связывающие скорость деформации и скорость, которые имеют вид

$$D\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}), \quad (2)$$

где $v_i = Du_i$ — скорость. Здесь D обозначает частную производную по времени от тензора, компоненты которого отнесены к координатным осям, неподвижно связанным с элементом материала.

Вторая группа уравнений получается из анализа напряженного состояния, которое зависит от геометрии и от законов Ньютона. Уравнения этой группы называются *уравнениями движения сплошной среды*. Эти уравнения имеют вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho a_i, \quad (3)$$

где ρ — плотность, X_i — массовые силы, a_i — ускорение. Для линейного вязко-упругого тела перемещения u_i достаточно малы, чтобы можно было заменить a_i на $\partial^2 u_i / \partial t^2$ и D на $\partial / \partial t$. Уравнения движения принимают теперь вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Эти приближенные уравнения приняты в гл. 3—5. Полученные таким образом результаты справедливы также для жидкостей при условии, что перемещения малы.

Третья группа уравнений — это уравнения, определяющие зависимость между напряжением и деформацией. Эти зависимости различны для разных материалов и являются частной формой уравнений, характеризующих отдельные разделы механики сплошной среды. В каждой задаче для вязко-упругого материала выбор различных форм уравнений, определяющих зависимость между напряжением и деформацией, выведенных в гл. 2, диктуется удобством применения.

В этой главе решаются задачи, в которых зависимые переменные изменяются синусоидально по времени. В следующей главе решаются задачи, в которых зависимые переменные изменяются достаточно медленно по времени, чтобы можно было пренебречь инерционными членами в уравнениях движения, т. е. считать правые части в уравнениях (3) или (4) равными нулю. В пятой главе рассматриваются задачи, в которых зависимые переменные быстро изменяются по времени.

Можно определить экспериментально с достаточной точностью комплексные модули для частот, больших 10^{-6} герц, и функции ползучести и релаксации для времен, больших 1 сек (обзор экспериментальной техники дан Ферри [1]). Поэтому, когда зависимые переменные изменяются синусоидально или достаточно быстро по времени, удобно применять уравнения, определяющие зависимость между напряжением и деформацией в форме, содержащей комплексный модуль или комплексную податливость; когда изменение зависимых переменных очень медленное, удобно применять уравнения, содержащие функции ползучести или релаксации. Когда вычисляется окончательный результат для реальных материалов, физические свойства

материала выражаются в форме, содержащей численные значения параметров для рассматриваемого временного интервала.

2. Распространение синусоидальных волн в бесконечной среде

Рассмотрим решения уравнений (1) и (4) для вязко-упругой среды, в которой все зависимые переменные изменяются синусоидально по времени. Предполагаем, что перемещения достаточно малы, чтобы можно было зависящий от ускорения член представить в форме $\rho \partial^2 u_i / \partial t^2$. Пусть

$$\sigma_{ij} = \operatorname{Re} [\bar{\sigma}_{ij} \exp(i\omega t)], \quad \varepsilon_{ij} = \operatorname{Re} [\bar{\varepsilon}_{ij} \exp(i\omega t)] \quad \text{и т. д.}, \quad (5)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ и т. д. — функции только пространственных координат, в общем случае комплексные. Допустим, что каждая массовая сила также изменяется синусоидально с угловой частотой ω . Из определения комплексных модулей (см. гл. 2, § 7) следует

$$\bar{s}_{ij} = Y_s \bar{e}_{ij} \quad (6)$$

и

$$\bar{\sigma}_{kk} = Y_v \bar{e}_{kk}, \quad (7)$$

где Y_s и Y_v — комплексный модуль девиатора и комплексный модуль объемного расширения соответственно. Уравнения (1) и (4) принимают вид

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j}) \quad (8)$$

и

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \rho \bar{X}_i + \rho \omega^2 \bar{u}_i = 0. \quad (9)$$

Из (6) и (7) получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \bar{s}_{ij} + \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij} = Y_s \bar{e}_{ij} + \frac{1}{3} Y_v \bar{e}_{kk} \delta_{ij} = \\ &= Y_s \bar{e}_{ij} + \frac{1}{3} (Y_v - Y_s) \bar{e}_{kk} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Подставив значение $\bar{\epsilon}_{ij}$ из (8), найдем

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} Y_s (\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j}) + \frac{1}{3} (Y_v - Y_s) \bar{u}_{kk} \delta_{ij}. \quad (10)$$

Подстановка значения $\bar{\sigma}_{ij}$ в уравнение (9) дает

$$\frac{1}{2} Y_s \bar{u}_{i,jj} + \frac{1}{6} (2Y_v + Y_s) \bar{u}_{j,ji} + \rho \bar{X}_i + \rho \omega^2 \bar{u}_i = 0. \quad (11)$$

Если уравнение (11) продифференцируем по x_i , то получим

$$\frac{1}{3} (2Y_s + Y_v) \bar{u}_{j,iii} + \rho \omega^2 \bar{u}_{j,i} = 0 \quad (12)$$

всякий раз, когда

$$X_{i,i} = 0. \quad (13)$$

Уравнению (12) удовлетворяет функция

$$\bar{u}_{j,j} = A \exp \left\{ \pm i\omega \sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} A_j x_j \right\}, \quad (14)$$

где A — постоянная, A_i — постоянный вектор, модуль которого равен единице. Следовательно, выражение ¹⁾

$$u_{j,j} = \operatorname{Re} \left[A \exp \left(i\omega \left\{ t \pm \sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} A_j x_j \right\} \right) \right] \quad (15)$$

является решением уравнений (1) и (4). Величина $u_{j,j}$ есть объемное расширение. Выражения (15) и (13) определяют плоские волны расширения, которые распространяются в вязко-упругой среде со скоростью v_D при условии, что дивергенция синусоидально изменяющихся массовых сил равна нулю. Скорость определяется формулой

$$v_D = \left\{ \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \right] \right\}^{-1}, \quad (16)$$

а затухание α_D — выражением

$$\alpha_D = -\omega \operatorname{Im} \left(\sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \right). \quad (17)$$

¹⁾ $\operatorname{Re}[z]$ и $\operatorname{Im}[z]$ означают соответственно действительную и мнимую части z .

Дифференцируя уравнение (11) по координате x_k , меняя местами i и k и вычитая результаты, имеем

$$\frac{1}{2} Y_s (\bar{u}_{i,kjj} - \bar{u}_{k,ijj}) + \rho \omega^2 (\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{k,i}) = 0 \quad (18)$$

при условии, что

$$X_{i,k} - X_{k,i} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (18) имеет решение

$$\frac{1}{2} (\bar{u}_{k,i} - \bar{u}_{i,k}) = B_{ik} \exp \left\{ \pm i\omega \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} B_j x_j \right\}, \quad (20)$$

где B_{ik} — постоянный антисимметричный тензор, B_j — постоянный вектор, модуль которого равен единице. Следовательно, формула

$$\frac{1}{2} (u_{k,i} - u_{i,k}) = \text{Re} \left[B_{ik} \exp \left\{ i\omega \left(t \pm \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} B_j x_j \right) \right\} \right] \quad (21)$$

представляет собой решение уравнений (1) и (4). Отметим, что разность $1/2 (u_{k,i} - u_{i,k})$ означает вращение. Уравнения (21) и (19) определяют плоские волны сдвига, распространяющиеся в вязко-упругой среде со скоростью v_R и затуханием α_R при условии, что вихрь синусоидально изменяющихся массовых сил равен нулю. Скорость определяется формулой

$$v_R = \left\{ \text{Re} \left[\sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} \right] \right\}^{-1}, \quad (22)$$

а затухание — соотношением

$$\alpha_R = -\omega \text{Im} \left[\sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} \right]. \quad (23)$$

Из формулы (22) видно, что скорость волны сдвига не зависит от частоты только при условии, что $\text{Re} [Y_s^{-1/2}] = \text{const}$. Из (2.63) видно, что это условие выполняется только тогда, когда Y_s есть действительная постоянная. В этом случае материал будет упругим относительно девиатора напряжения, $Y_s = 2\mu$, где μ — модуль сдвига и скорость равна $\sqrt{\mu/\rho}$. Далее из формул (23) и (2.63) следует, что затухание равно нулю только тогда, когда

материал будет упругим относительно девиатора напряжения. Для всех других материалов затухание зависит от частоты. Таким образом, получаем следующий вывод.

„Все вязко-упругие материалы, за исключением тех, для которых зависимость между девиаторами напряжения и деформации соответствует упругому материалу, имеют дисперсию и диссипацию синусоидальных волн сдвига, а затухание зависит от частоты“.

Так как сумма $2Y_s + Y_v$ не может быть действительной, если оба слагаемых не будут действительными, то из формул (16) и (17) получаем результат.

„Все вязко-упругие материалы, за исключением чисто упругих, имеют дисперсию и диссипацию синусоидальных волн расширения, а затухание волн зависит от частоты“.

Нужно еще найти перемещения, вызванные плоскими волнами расширения или сдвига. Плоская синусоидальная волна вызывает перемещения, которые определяются уравнениями

$$u_j = \operatorname{Re} [C_j \exp \{i\omega(t \pm Zn_k x_k)\}] \quad (24)$$

или

$$\bar{u}_j = C_j \exp(\pm i\omega Zn_k x_k), \quad (25)$$

где C_j — постоянный вектор, который может принимать комплексные значения, Z — комплексная постоянная, n_k — единичный вектор, совпадающий с направлением распространения волны. Подстановка значения \bar{u}_j , согласно (25), в уравнение (11) дает

$$-\frac{1}{2} C_i \omega^2 Z^2 Y_s - \frac{1}{6} \omega^2 Z^2 (2Y_v + Y_s) C_j n_j n_i + \rho \omega^2 C_i = 0$$

при условии

$$X_i = 0,$$

т. е.

$$C_j n_j n_i = 3 \frac{2\rho Z^{-2} - Y_s}{2Y_v + Y_s} C_i.$$

Это векторное уравнение, поэтому или оба вектора равны по величине и направлению, или оба вектора имеют коэф-

фициенты, равные нулю. В первом случае имеем

$$C_i \parallel n_i, \quad Z^2 = \frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}$$

и

$$u_j = \operatorname{Re} \left[A n_j \exp \left(i\omega \left\{ t \pm \sqrt{\left(\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v} \right) n_k x_k} \right\} \right) \right], \quad (26)$$

где A — комплексная постоянная. Во втором случае найдем

$$C_i \perp n_i, \quad Z^2 = \frac{2\rho}{Y_s}$$

и

$$u_j = \operatorname{Re} \left[C_j \exp \left(i\omega \left\{ t \pm \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} n_k x_k \right\} \right) \right]. \quad (27)$$

Перемещение u_j в выражении (26) удовлетворяет условиям $u_{j,i} - u_{i,j} = 0$ и $u_{i,j} \neq 0$. Перемещение u_j в (27) удовлетворяет условиям $u_{j,j} = 0$ и $u_{j,i} - u_{i,j} \neq 0$. Результаты этого параграфа можно суммировать следующим образом.

„В линейном вязко-упругом материале, в котором отсутствуют синусоидальные массовые силы, возможны только плоские синусоидальные волны. Это волна расширения без вращения и волна сдвига без расширения. В первом случае движение происходит вдоль направления распространения волны, а во втором случае движение происходит вдоль некоторого направления, нормального направлению распространения волны“.

Этот результат аналогичен случаю упругой среды.

Напряжение, вызываемое волной одного из указанных выше видов, можно найти подстановкой выражения (25) в (10). Это дает

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} = & \left[\frac{1}{2} Y_s (C_j n_i + C_i n_j) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} (Y_v - Y_s) C_i n_i \delta_{ij} \right] i\omega Z e^{\pm i\omega Z n_k x_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, для плоской волны расширения имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -\operatorname{Im} \left[A \left\{ Y_s n_i n_j + \frac{1}{3} (Y_v - Y_s) \delta_{ij} \right\} \times \right. \\ & \left. \times \omega \sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \exp \left(i\omega \left\{ t \pm \sqrt{\left(\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v} \right) n_k x_k} \right\} \right) \right], \quad (28) \end{aligned}$$

а для плоской волны сдвига найдем

$$\sigma_{ij} = - \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} Y_s (C_j n_i + C_i n_j) \omega \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(i\omega \left\{ t \pm \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} n_k x_k \right\} \right) \right], \quad (29)$$

где $C_i n_i = 0$.

Скорость волны сдвига стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$, если $Y_s \rightarrow \infty$ или $J_s \rightarrow 0$, когда $\omega \rightarrow \infty$. Из формулы (2.62) видно, что в этом случае основная сетка материала состоит только из конечного числа элементов, и материал не имеет мгновенной упругой деформации, когда приложен девиатор напряжения. Скорость волны расширения стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$, если один или оба модуля Y_s и Y_v стремятся к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$.

Рассмотрим среду, в которой волны имеют дисперсию, но не имеют затухания. Для такой среды имеет смысл понятие групповой скорости при наложении двух волн равной амплитуды и близких по величине частот. Для вязко-упругого материала, исключая чисто упругий, две такие волны могут иметь равную амплитуду вообще только в одной частной точке, так как они имеют разное затухание. Следовательно, понятие групповой скорости в своей первоначальной форме не может быть применено в данном случае. Однако групповая скорость в недиссипативной среде имеет важное значение, так как она равна скорости распространения энергии. Эта скорость называется иногда „скоростью энергии“. По определению, скорость энергии равна средней по времени скорости протекания энергии через единицу площади, нормальной к направлению распространения волны, деленной на среднюю по времени плотность энергии. Это определение может быть принято для диссипативной среды при условии, что плотность энергии рассматривается как сумма кинетической и накопленной энергий на единицу объема и что исключается вся энергия, рассеянная в этом объеме до начала отсчета времени.

Вычислим теперь скорость энергии для обоих типов плоских волн. Изменение в единицу времени работы, протекающей через единицу площади в направлении рас-

пространения волны, равно $-\sigma_{ij}n_j Du_i$. Следовательно, средняя по времени скорость энергии, протекающей через единицу площади, равна $\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{\sigma}_{ij}n_j (D\bar{u}_i)^*]$, где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину¹⁾. Для волны расширения из выражений (28) и (26) получим

$$\sigma_{ij}n_j = \operatorname{Re} \left[i\omega A \sqrt{\frac{\rho(2Y_s + Y_v)}{3}} \times \right. \\ \left. \times n_i \exp \left(i\omega \left\{ t - \sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} n_k x_k \right\} \right) \right]$$

и

$$Du_i = \operatorname{Re} \left[i\omega A n_i \exp \left(i\omega \left\{ t - \sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} n_k x_k \right\} \right) \right]. \quad (30)$$

Следовательно, для волны расширения имеем

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{\sigma}_{ij}n_j (D\bar{u}_i)^*] = \frac{V\bar{\rho}}{2\sqrt{3}} \omega^2 |A|^2 \times \\ \times \exp \left\{ -2\omega \operatorname{Im} \left[\sqrt{\left(\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v} \right)} n_k x_k \right] \operatorname{Re} [\sqrt{2Y_s + Y_v}] \right\}. \quad (31)$$

Для волны сдвига выражения (29) и (27) дают

$$\sigma_{ij}n_j = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} i\omega Y_s C_i \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} \exp \left(i\omega \left\{ t - \sqrt{\left(\frac{2\rho}{Y_s} \right)} n_k x_k \right\} \right) \right]$$

и

$$Du_i = \operatorname{Re} \left[i\omega C_i \exp \left(i\omega \left\{ t - \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} n_k x_k \right\} \right) \right]. \quad (32)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\bar{\sigma}_{ij}n_j (D\bar{u}_i)^*] = \frac{V\bar{2\rho}}{4} \omega^2 |C_i|^2 \times \\ \times \exp \left\{ -2\omega \operatorname{Im} \left[\sqrt{\left(\frac{2\rho}{Y_s} \right)} n_k x_k \right] \operatorname{Re} [\sqrt{Y_s}] \right\}. \quad (33)$$

Средняя по времени плотность энергии \bar{E} равна сумме средней по времени кинетической энергии на единицу объема плюс средняя по времени накопленная энергия на

¹⁾ См. доказательство этого результата, например, в работе [2].

единицу объема. Используя формулы (2.31) и (2.74), найдем

$$\bar{E} = \frac{1}{4} \rho |D\bar{u}_i|^2 + \frac{1}{4} \operatorname{Re} [J_s] |s_{ij}|^2 + \frac{1}{12} \operatorname{Re} [J_v] |\sigma_{kk}|^2.$$

Для волны расширения из выражений (30) и (28) имеем

$$\begin{aligned} \bar{E} = & \frac{1}{4} \rho \omega^2 |A^2| \exp \left\{ -2\omega \operatorname{Im} \left[\sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \right] n_k x_k \right\} \times \\ & \times \left(1 + \operatorname{Re} [J_s] |Y_s|^2 \frac{2}{|2Y_s + Y_v|} + \operatorname{Re} [J_v] |Y_v|^2 \frac{1}{|2Y_s + Y_v|} \right). \end{aligned}$$

Теперь

$$J_s = Y_s^{-1},$$

следовательно,

$$\operatorname{Re} [J_s] = |Y_s|^{-2} \operatorname{Re} [Y_s].$$

Таким образом, скорость распространения энергии для волны расширения равна (на основании данной ниже леммы¹⁾)

$$\begin{aligned} \frac{2}{V\sqrt{3\rho}} \operatorname{Re} [V\sqrt{2Y_s + Y_v}] \left(1 + \frac{\operatorname{Re} [2Y_s + Y_v]}{|2Y_s + Y_v|} \right)^{-1} = \\ = \left\{ \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Для волны расширения формулы (32) и (29) дают

$$\bar{E} = \frac{1}{4} \rho \omega^2 |C_i|^2 \exp \left\{ -2\omega \operatorname{Im} \left[\sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} \right] n_k x_k \right\} (1 + \operatorname{Re} [J_s] |Y_s|).$$

$$^1) \text{ Л е м м а } \operatorname{Re} [V\bar{z}] \left(1 + \frac{\operatorname{Re} [z]}{|z|} \right)^{-1} = \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{2}{V\bar{z}} \right] \right\}^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $z = re^{i\theta}$, где r и θ имеют действительные значения. Тогда левая часть уравнения равна

$$V\bar{r} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta)^{-1} = V\bar{r} \cos \frac{\theta}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1} = \frac{1}{2} V\bar{r} \sec \frac{\theta}{2},$$

а правая часть уравнения равна

$$\{\operatorname{Re} [2r^{-1/2} e^{-i\theta/2}]\} = \frac{1}{2} V\bar{r} \sec \frac{\theta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для волны сдвига скорость распространения энергии равна

$$\sqrt{\frac{2}{\rho}} \operatorname{Re} [V \bar{Y}_s] \left(1 + \frac{\operatorname{Re} [Y_s]}{|Y_s|}\right)^{-1} = \left\{ \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} \right] \right\}^{-1}.$$

Сравнение формул для скоростей распространения энергии с формулами (16) и (22) приводит к следующему результату.

„Скорости распространения энергии для волн расширения и сдвига в линейном вязко-упругом материале равны соответствующим скоростям волн“.

Для упругого материала, который не имеет дисперсии и диссипации, это приводит к хорошо известному результату, что волновая, групповая скорость и скорости распространения энергии равны.

В векторном обозначении уравнение (12) принимает вид

$$\frac{1}{3} (2Y_s + Y_v) \nabla^2 (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}) + \rho \omega^2 \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (34)$$

Это уравнение имеет сферически симметричное решение

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \frac{A}{r} \exp \left\{ \pm i\omega \sqrt{\left(\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v} \right)} r \right\},$$

где A — постоянная, имеющая действительное значение. Таким образом, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{A}{r} \operatorname{Re} \left[\exp \left(i\omega \left\{ t + \sqrt{\left(\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v} \right)} r \right\} \right) \right]. \quad (35)$$

Полученное решение представляет собой синусоидальные по времени сферические волны расширения, расходящиеся (или сходящиеся) от точечного источника. Скорость этих волн равна

$$\left\{ \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \right] \right\}^{-1},$$

а амплитуда на радиусе r равна

$$\frac{A}{r} \exp \left\{ -\omega \operatorname{Im} \left[\sqrt{\left(\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v} \right)} r \right] \right\}.$$

Уравнение (34) имеет решение в цилиндрических координатах r, θ, z , которое зависит только от r и имеет вид

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = AH_0^{(2)} \left(\sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \omega r \right),$$

где A — постоянная, $H_0^{(2)}(z)$ — функция Ханкеля нулевого порядка. Таким образом,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{Re} \left[AH_0^{(2)} \left(\sqrt{\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v}} \omega r \right) \exp(i\omega t) \right]. \quad (36)$$

Для больших z имеем

$$H_0^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left\{ -i \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

Следовательно, для больших r найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} \sim \operatorname{Re} \left[A \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{2(2Y_s + Y_v)}{3\rho\omega r}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(i\omega \left\{ t - \sqrt{\left(\frac{3\rho}{2Y_s + Y_v} \right) r} \right\} \right) \right]. \end{aligned}$$

Это решение представляет собой синусоидальные по времени цилиндрические волны, распространяющиеся от равномерного линейного источника. Сходящиеся волны определяются решением, содержащим функцию $H_0^{(1)}(z)$. В качестве упражнения читателю предлагается определить перемещение и напряжение, вызываемое этими волнами расширения. Берри [3] дал решение задачи в случае, когда постоянное давление, зависящее от времени, приложено на поверхности сферической пустоты в сплошной среде. В этой же статье он решил задачу о вынужденных крутильных колебаниях кругового цилиндра.

Уравнение (18) в векторной форме имеет вид

$$\frac{1}{2} Y_s \nabla^2 (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}) + \rho \omega^2 (\operatorname{rot} \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (37)$$

где $\nabla^2 \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}$. Решение для трех компонентов вихря $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ может быть найдено в различных системах координат. Дивергенция найденного таким образом вектора должна быть всегда равна нулю. Следовательно, возникновение сферически симметричных волн сдвига невозможно.

3. Принцип соответствия для синусоидальных колебаний

В предыдущем параграфе решения для напряжения и перемещения были найдены на основе (5) — (9). Форма этих уравнений отличается от уравнений для упругого материала только тем, что модули упругости заменены комплексными модулями. Таким образом, можно получить решение некоторой задачи синусоидальных колебаний для вязко-упругого материала с помощью *принципа соответствия*, который формулируется следующим образом: „Если решение некоторой задачи для упругого материала имеет вид

$$f = \operatorname{Re} [\bar{f}_E \exp (i\omega t)]$$

для каждой зависимой переменной, то решение соответствующей задачи для вязко-упругого материала будет иметь вид

$$f = \operatorname{Re} [\bar{f}_{VE} \exp (i\omega t)],$$

где \bar{f}_{VE} обозначает функцию, полученную из функции \bar{f}_E заменой модулей упругости на соответствующие комплексные модули“. Выражение „соответствующая задача“ означает ту же самую задачу, в которой упругое тело заменено вязко-упругим.

Принцип соответствия применим только при следующих условиях: 1) решение задачи для упругого материала известно; 2) при решении задачи для упругого материала не применяется операция, которой при решении задачи для вязко-упругого материала будет соответствовать операция отделения действительной и мнимой частей комплексного модуля, за исключением окончательного определения f и \bar{f} ; 3) граничные условия для двух случаев одинаковы. Например, по условию 2) принцип соответствия нельзя применить в случае, когда нужно определить максимум $|f|$ как функцию угловой частоты ω . Применение принципа соответствия в случае вязко-упругого материала законно для определения f , но так как определение модуля комплексного числа требует разделения действительной и мнимой частей, то отыскание максимума $|f|$ должно быть

сделано отдельно для упругого и вязко-упругого материалов.

Решения (14) и (21) предыдущего параграфа можно получить из решений задачи для упругого материала с помощью принципа соответствия. Однако выражения для скорости энергии включают комплексно сопряженные величины и, следовательно, принцип соответствия не может быть здесь приложен. Приближенные решения для упругих тел, которые даются в сопротивлении материалов, могут быть приспособлены для вязко-упругих тел при одинаковых граничных условиях. Такие решения будут верны только при таких условиях, при которых будут справедливы решения для упругих тел. Теперь будут даны примеры применения принципа соответствия.

4. Колебания пластины ¹⁾

Пластина — это прямоугольный параллелепипед из вязко-упругого материала, толщина которого мала сравнительно с длиной и шириной. Один край пластины защемлен и пластина совершает вынужденные колебания изгиба в направлении, нормальном к поверхности, с постоянной амплитудой и частотой. Нужно найти уравнение движения свободного края пластины с помощью комплексного модуля при заданной частоте или определить комплексный модуль по замеренному движению. Математически эти задачи эквивалентны и требуют вывода уравнения движения свободного края пластины.

Если x — расстояние, измеряемое вдоль пластины от заделанного края (рис. 13), а v — поперечное перемещение, то для упругой пластины, совершающей синусоидальные колебания с угловой частотой ω , имеем следующее уравнение движения:

$$\frac{d^4 \bar{v}}{dx^4} - \frac{m\omega^2}{EI} \bar{v} = 0, \quad (38)$$

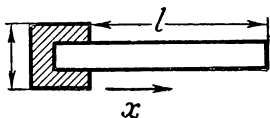
где m — масса, приходящаяся на единицу длины, E — модуль упругости, I — момент инерции поперечного сечения,

¹⁾ Автор рассматривает задачу для бесконечно широкой пластины. — *Прим. ред.*

также приходящийся на единицу длины. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{v} &= V, \quad \frac{d\bar{v}}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} &= \frac{d^3\bar{v}}{dx^3} = 0 \quad \text{при } x = l,\end{aligned}$$

так как изгибающий момент и перерезывающая сила на свободном крае равны нулю. Решение уравнения (38) при



Р и с. 13. Консольно закрепленная пластина

этих граничных условиях определяет поперечное перемещение свободного края в виде

$$\bar{v} = V \frac{\operatorname{ch} \psi + \cos \psi}{1 + \operatorname{ch} \psi \cos \psi},$$

где

$$\psi = \left(\frac{m\omega^2}{EI} \right)^{1/4} l. \quad (39)$$

Если A обозначает отношение амплитуд колебаний свободного края и заделанного края, а θ — отставание по фазе свободного края от заделанного, то

$$Ae^{-i\theta} = \frac{\operatorname{ch} \psi + \cos \psi}{1 + \operatorname{ch} \psi \cos \psi}. \quad (40)$$

Решение для вязко-упругого материала получается по принципу соответствия из формул (39) и (40) заменой в (39) модуля упругости на соответствующий вязко-упругий комплексный модуль.

Теперь нужно выразить вязко-упругий комплексный модуль, соответствующий изменению модуля упругости, через Y_s и Y_v . Из выражений (6) и (7) получим

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{ij} &= \bar{e}_{ij} + \frac{1}{3} \bar{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{Y_s} \bar{s}_{ij} + \frac{1}{3Y_v} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij} = \\ &= \frac{1}{Y_s} \bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{Y_s} - \frac{1}{Y_v} \right) \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij}.\end{aligned}$$

В частности,

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{Y_s} + \frac{1}{Y_v} \right) \bar{\sigma}_{11} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{Y_s} - \frac{1}{Y_v} \right) (\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}).$$

Для упругого материала имеем

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{E} \bar{\sigma}_{11} - \frac{\nu}{E} (\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}).$$

Сравнение последних двух формул показывает, что вязко-упругий комплексный модуль Y_T , соответствующий модулю Юнга для упругого твердого тела, определяется выражением

$$Y_T = 3 \left(\frac{2}{Y_s} + \frac{1}{Y_v} \right)^{-1}, \quad (41)$$

а коэффициент Пуассона для вязко-упругого материала равен

$$\nu = \left(\frac{1}{Y_s} - \frac{1}{Y_v} \right) \left(\frac{2}{Y_s} + \frac{1}{Y_v} \right)^{-1} = \frac{Y_v - Y_s}{2Y_v + Y_s}. \quad (42)$$

Амплитудное отношение A и фаза запаздывания θ между свободным и заделанным краями вязко-упругой пластины описываются, следовательно, формулой

$$Ae^{-i\theta} = \frac{\operatorname{ch} \psi + \cos \psi}{1 + \operatorname{ch} \psi \cos \psi},$$

где

$$\psi = \left\{ \frac{m\omega^2}{3I} \left(\frac{2}{Y_s} + \frac{1}{Y_v} \right) \right\}^{1/4}. \quad (43)$$

Таблица 3.1

Соответствующие упругий и вязко-упругий модули

Мо- дули	Сдвиг	Сжа- тие	Модуль Юнга	Коэффициент Пуассона	Постоянная Ламэ
Упру- гий	μ	k	E	ν	$\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$
Вязко- упру- гий	$\frac{1}{2} Y_s$	$\frac{1}{3} Y_v$	$3 \left(\frac{2}{Y_s} + \frac{1}{Y_v} \right)^{-1} = Y_T$	$\frac{Y_v - Y_s}{2Y_v + Y_s} = \nu$	$\frac{1}{3} (Y_v - Y_s)$

Для определения максимума (или максимумов) амплитудного отношения A в зависимости от частоты величина A должна быть выражена явно из формул (40) и (43). Детали метода даны в статье Бленда и Ли [4].

5. Свободные колебания сплошной сферы ¹⁾

Основные соотношения для радиальных колебаний упругой сферы в сферических координатах имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r},$$

где u — перемещение в направлении радиуса, λ и μ — постоянные Ламэ.

В результате получим дифференциальное уравнение для радиального перемещения u в форме

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Решение этого уравнения для угловой частоты ω , которое имеет конечное значение при $r=0$, равно

$$u = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\kappa}{r} \cos \kappa r - \frac{1}{r^2} \sin \kappa r \right) \exp(i\omega t) \right], \quad (44)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}. \quad (45)$$

Так как внешние силы на поверхности сферы отсутствуют, то $\sigma_{rr} = 0$ при $r = a$. Следовательно, характеристическое уравнение для частоты ω записывается в форме

$$a\kappa \operatorname{ctg} a\kappa = 1 - \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu} (a\kappa)^2. \quad (46)$$

Все операции, использованные для получения этого решения, были линейные, поэтому принцип соответствия может быть применен для решения соответствующей задачи для вязко-упругого материала. Применение табл. 3.1 показывает, что $\lambda + 2\mu$ должно быть заменено на

¹⁾ Решение для упругой сферы получено Пуассоном.

$\frac{1}{3}(Y_v + 2Y_s)$, а μ — на $Y_s/2$. Выражения (45) и (46) принимают вид

$$\kappa^2 = \frac{3\rho\omega^2}{Y_v + 2Y_s} \quad (47)$$

и

$$a\kappa \operatorname{ctg} a\kappa = 1 - \frac{Y_v + 2Y_s}{6Y_s} (a\kappa)^2. \quad (48)$$

Если отношение Y_s/Y_v есть действительная постоянная, не зависящая от частоты, тогда корни $a\kappa$ уравнения (48) будут действительными, в противном случае они будут комплексными. В том и другом случае подстановка значения κ в формулу (47) показывает, что частота ω будет комплексной (за исключением частотного случая упругой среды). Собственные значения для задачи свободных синусоидальных колебаний вязко-упругого материала рассеивают энергию, и внешние силы не производят работу в материале.

Исследуем далее решение для частного случая. Упругий материал удовлетворяет „условию Пуассона“, если $\nu = 1/4$. Это же определение применяется для вязко-упругого материала. Из табл. 3.1 видно, что это влечет за собой равенство $2Y_v = 5Y_s$ для всех ω . Рассмотрим частный случай, в котором выбран материал Максвелла, удовлетворяющий условию Пуассона вида

$$\frac{1}{5} Y_v = \frac{1}{2} Y_s = \frac{E}{1 + (E/i\omega\eta)}, \quad (49)$$

причем для рассматриваемых частот $E/\omega\eta \ll 1$.

Уравнение (48) принимает теперь вид

$$a\kappa \operatorname{ctg} a\kappa = 1 - \frac{3}{4} (a\kappa)^2.$$

Первые пять корней этого уравнения имеют значения $a\kappa/\pi = 0,8160; 1,9285; 2,9359; 3,9658; 4,9728$. Формула (47) дает

$$\omega = \frac{\kappa}{\sqrt{3\rho}} \sqrt{Y_v + 2Y_s} = \kappa \sqrt{\frac{3E}{\rho}} \left(1 + \frac{E}{i\omega\eta}\right)^{-1/2}.$$

Принимая во внимание, что $E/\omega\eta \ll 1$, найдем

$$\omega = \kappa \sqrt{\frac{3E}{\rho}} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\sqrt{\rho E}}{\sqrt{3} \kappa \eta} \right) = \kappa \sqrt{\frac{3E}{\rho}} + \frac{iE}{2\eta}.$$

Подставив полученное значение частоты в выражение (44), получим радиальное перемещение в виде

$$u = A \left(\frac{\kappa}{r} \cos \kappa r - \frac{\sin \kappa r}{r^2} \right) \exp \left(-\frac{E}{2\eta} t \right) \cdot \cos \kappa \sqrt{\left(\frac{3E}{\rho} \right)} t. \quad (50)$$

Время, в течение которого перемещение уменьшается в $1/e$ раз сравнительно со своим начальным значением, равно $2\eta/E$ и не зависит от частоты и радиуса сферы. В случае материала Максвелла, который удовлетворяет условию $E/\omega\eta \ll 1$, видно, что перемещение всегда равно соответствующему перемещению для упругого материала, умноженному на коэффициент затухания $\exp(-Et/2\eta)$, если оба материала удовлетворяют условию Пуассона.

6. Волны Рэлея

Волны Рэлея распространяются параллельно плоскости, ограничивающей полубесконечную вязко-упругую среду. Выберем систему координат так, чтобы ось x совпадала с направлением распространения волны, а ось z была нормальна граничной плоскости (положительное z направлено в рассматриваемую среду). Обозначим компоненты перемещения в направлении осей x и z соответственно через u и w . Тогда перемещение в упругой среде определяется выражениями (см., например, [5])

$$u = A \operatorname{Re} \left[-i\kappa \{ e^{-qz} - 2qs(s^2 + \kappa^2)^{-1} e^{-sz} \} e^{i(\omega t - \kappa x)} \right] \quad (51)$$

и

$$w = A \operatorname{Re} \left[q \{ e^{-qz} - 2\kappa^2(s^2 + \kappa^2)^{-1} e^{-sz} \} e^{i(\omega t - \kappa x)} \right], \quad (52)$$

где

$$q^2 = \kappa^2 (1 - \alpha\theta^2), \quad s^2 = \kappa^2 (1 - \theta^2), \quad \theta^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu\kappa^2}, \quad \alpha = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad (53)$$

а θ^2 удовлетворяет уравнению

$$\theta^6 - 8\theta^4 + (24 - 16\alpha)\theta^2 + 16\alpha - 16 = 0. \quad (54)$$

Здесь A — действительная постоянная.

Перемещения для волн Рэлея в вязко-упругой среде определяются с помощью принципа соответствия, выражения (51) и уравнения (54). Используя табл. 3.1, видим, что величину $\alpha = \mu/(\lambda + 2\mu)$ нужно заменить на $3Y_s/(2Y_v + 4Y_s)$, а μ — на $Y_s/2$. Уравнение (54) нужно разрешить относительно θ^2 , а формулы (53) относительно κ^2 , q^2 , s^2 . Подстановка полученных величин в уравнения (51) и (52) дает истинные перемещения. Выбранный корень уравнения (54) должен давать положительное значение действительных частей q и s . Остается еще показать, что для каждого вязко-упругого материала существует один и только один такой корень.

Заметим, что в этом параграфе, так же как и в § 2, в котором тело имеет бесконечную протяженность, затухание зависит от x . В предыдущем параграфе, в котором рассматриваемое тело имело конечную протяженность, затухание зависит от t .

Интересным приложением этой теории является затухание волн Рэлея, когда они проходят в результате землетрясения через верхние слои земной поверхности¹⁾. Юинг и Пресс [7] определили, что скорость волн Рэлея, имеющих периоды от 250 до 350 сек, равна 4,8 км/сек, а затухание, с учетом кривизны земной поверхности, равно $0,8 \cdot 10^{-5}$ км⁻¹. Затухание очень мало, поэтому можно считать, что земля близка к упругому материалу. Учитывая малую величину затухания, можно принять, что земля является материалом Максвелла, для которого в рассматриваемом интервале частот $E/\omega\eta \ll 1$. Для упрощения можно далее предположить, что земля удовлетворяет условию Пуассона, так что комплексный модуль определяется по формуле (49). Попытаемся найти величины E и η , которые дают замеренные значения скорости и затухания.

¹⁾ Обзор вязко-упругого поведения земли дан Гуттенбергом [6].

Из уравнения (49) имеем

$$\alpha = 3Y_s / (2Y_v + 4Y_s) = \frac{1}{3}.$$

Уравнение (54) принимает теперь вид

$$(\theta^2 - 4)(3\theta^4 - 12\theta^2 + 8) = 0,$$

отсюда, $\theta^2 = 4$ и $\theta^2 = 2 \pm \frac{2}{3} \sqrt{3}$. Для упругого тела подходящий корень равен $2 - \frac{2}{3} \sqrt{3}$. Если предположить, что при $\eta \rightarrow \infty$ тип распространяющейся волны изменяется непрерывно, то подходящий корень для материала Максвелла равен $2 - \frac{2}{3} \sqrt{3}$, т. е. $\theta = \sqrt{2 - \frac{2}{3} \sqrt{3}} = 0,9194$.

Из формул (49) и (53) и табл. 3.1 имеем

$$\kappa = \frac{\omega}{\theta} \sqrt{\frac{2\rho}{Y_s}} = \frac{\omega}{\theta} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \left(1 - \frac{iE}{2\omega\eta}\right);$$

таким образом, из выражений (51) или (52) получим, что скорость распространения волны Рэлея равна

$$\frac{\omega}{\operatorname{Re}[\kappa]} = \theta \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

а затухание волны Рэлея равно

$$-\operatorname{Im}[\kappa] = \frac{V(\rho E)}{2\theta\eta}.$$

Подстановка экспериментальных значений скорости и затухания дает $\theta = 0,9194$. Предполагая, что плотность $\rho = 6$, найдем

$$E = 1,56 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2, \quad \eta = 2,08 \cdot 10^{16} \text{ дин} \cdot \text{сек/см}^2. \quad (55)$$

Средняя величина частоты ω равна $1/50 \text{ сек}^{-1}$, следовательно, $E/\omega\eta = 0,37 \cdot 10^{-2}$. Пренебрегая квадратами отношения $E/\omega\eta$, получаем правильную величину.

Таким образом, находим значения скорости и затухания волны Рэлея, распространяющейся в земной коре, в предположении, что кора является материалом Максвелла, удовлетворяющим условию Пуассона, с постоянными, определяемыми (55). Так как $2\eta/E = 2,67 \cdot 10^4 \text{ сек}$, то ясно,

что затухание в земной коре достаточно для предупреждения распространения радиальных колебаний (рассмотренных в последнем параграфе), которые могут возникать, например, от построек на поверхности земли.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ferry J. D., *Rheology* v. 2, 433, Ed. F. R., Academic Press, New York, 1956.
2. Brillouin L., *Wave propagation in periodic structures*, Second Edition, Section 19, p. 70—72, Dover Publications, 1953.
3. Berry D. S., *Stress propagation in viscoelastic bodies*, *J. Mech. Phys. Solids*, 6, № 3, 177—185 (1958).
4. Bland D. R., Lee E. H., *Calculations of complex modulus of linear viscoelastic materials from vibration reed measurements*, *J. Appl. Phys.*, 26, № 12, 1497—1503 (1955).
5. Kolsky H., *Stress waves in solids*, p. 16 et seq, Clarendon Press, 1954. Русский перевод: Колъский Г., *Волны напряжения в твердых телах*, М., ИЛ, 1955.
6. Guttenberg B., *Rheology*, v. 2 (Chapter 2), *Rheological problems of the earth's interior*, Ed. Eirich F. R., Academic Press, New York, 1956.
7. Ewing M., Press F., *Montle Rayleigh waves from the Kamchatka earthquake of November 4, 1952*, *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 44, 477 (1954).

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ II. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Принцип соответствия

Квазистатической называется задача, в которой зависимые переменные изменяются настолько медленно по времени, что в уравнениях движения можно пренебречь инерционными членами. В этом случае основные уравнения для малых деформаций имеют вид

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = 0. \quad (2)$$

К этим уравнениям нужно добавить зависимость между напряжением и деформацией для вязко-упругого материала. Комплексные модули можно измерить для таких малых частот, как 10^{-6} герц, но применять комплексные модули не практично в задачах, для которых интервал времени превышает 10^6 сек, или примерно 10 дней. Функции ползучести и релаксации могут быть измерены в любое время, начиная приблизительно с 1 сек после приложения напряжения или деформации. Во многих приложениях приходится рассматривать силы, которые действуют на вязко-упругий материал в течение нескольких недель (например, эксперименты на ползучесть), поэтому для решения подобных задач следует использовать такие зависимости между напряжением и деформацией, которые получаются из измерений ползучести или релаксации. Преобразование Лапласа для этих измерений выбрано потому, что оно всегда сходится, и в случае, когда желательна числовая оценка, нужен только один интеграл для каждого значения независимой переменной преобразования p .

Из выражений (2.45) и (2.46) получим преобразования Лапласа для зависимости между напряжением и деформацией в виде ¹⁾

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta p} + \sum_{b=1}^N \frac{B^{(b)} \lambda^{(b)}}{p + \lambda^{(b)}} \right) \bar{\sigma}$$

или

$$\bar{\sigma} = \left(E' + \eta' p + \sum_{r=1}^{N'} \frac{C^{(r)} p}{p + \mu^{(r)}} \right) \bar{\varepsilon}.$$

Если эти выражения сравнить с формулами (2.62) и (2.63), то можно написать

$$\bar{\varepsilon} = J(p) \bar{\sigma} \quad (3)$$

и

$$\bar{\sigma} = Y(p) \bar{\varepsilon}, \quad (4)$$

где $J(p)$ и $Y(p)$ — те же самые функции от p , что $J(i\omega)$ и $Y(i\omega)$ — функции от $i\omega$. Из (2.44) и (2.48) следует, что

$$J(p) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta p} + p \bar{\psi}(p) \quad (5)$$

и

$$Y(p) = E' + \eta' p + p \bar{\chi}(p). \quad (6)$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{p} J(p)$ и $\frac{1}{p} Y(p)$ есть преобразования Лапласа для деформации, соответствующей напряжению, определяемому единичной функцией $H(t)$, и для напряжения, соответствующего деформации, определяемой единичной функцией $H(t)$, т. е. величины, измеренные соответственно при опытах на ползучесть и релаксацию. Мы будем называть $J(p)$ *податливостью, зависящей от p* , а $Y(p)$ — *модулем, зависящим от p* .

Зависимости (3) и (4) для девиатора и объемной деформации запишем в форме

$$\bar{e}_{ij} = J_s(p) \bar{s}_{ij} \quad \text{и} \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = J_v(p) \bar{\sigma}_{ii}, \quad (7)$$

$$\bar{s}_{ij} = Y_s(p) \bar{e}_{ij} \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_{ii} = Y_v(p) \bar{\varepsilon}_{ii}. \quad (8)$$

¹⁾ Черта над переменной в этой главе означает преобразование Лапласа.

Применим преобразование Лапласа к формуле (1) и уравнению (2)

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j}) \quad (9)$$

и

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \rho \bar{X}_i = 0. \quad (10)$$

До сих пор применялось двустороннее преобразование Лапласа (интервал интегрирования от $-\infty$ до ∞). Во многих реальных задачах напряжение или деформация равны нулю при $t < 0$ и становятся не равными нулю только при $t > 0$. В этих случаях, по аналогии с терминологией, применяемой в теории электрических линий передач, мы будем говорить, что вязко-упругий материал находится в *начальном состоянии покоя*. Для таких задач двустороннее преобразование Лапласа от $-\infty$ до ∞ заменяется односторонним преобразованием (интервал интегрирования от 0 до ∞). Выражения (3) и (10) не изменяются потому, что σ_{ij} и ε_{ij} равны нулю при $t < 0$, а $\psi(t)$ и $\chi(t)$ содержат множитель $H(t)$, который равен нулю для $t < 0$. Для задач с начальным состоянием покоя требуется три граничных условия везде на поверхности материала для всех времен $t > 0$.

Если преобразования Лапласа основных уравнений и граничных условий для вязко-упругого материала существуют в случае квазистатической задачи с начальным состоянием покоя и если сравнить эти преобразования с соответствующими преобразованиями подобной задачи для упругого материала, то можно видеть, что эти преобразования отличаются только тем, что упругие модули заменены соответствующими модулями, зависящими от p ¹⁾. Таким образом, решение квазистатической задачи для вязко-упругого материала можно получить из решения соответствующей задачи для упругого материала при условии, что преобразования Лапласа для граничных условий существуют, с помощью принципа соответствия.

„В решении, которое получено для упругого материала, зависимые переменные и граничные условия заме-

¹⁾ Предполагается, что граничные условия включают заданные напряжения или перемещения.

няются их преобразованиями Лапласа, а модули упругости — соответствующими модулями, зависящими от p . Решение задачи для вязко-упругого материала получим обращением преобразований зависимых переменных, полученных при решении задачи для упругого материала⁴.

Табл. 3.1 можно использовать по-прежнему для соответствующих модулей при условии, что Y_s и Y_v рассматриваются теперь как $Y_s(p)$ и $Y_v(p)$. В следующих трех параграфах этим методом решаются частные задачи.

2. Расширение армированного цилиндра от внутреннего давления¹⁾

Толстый прямой круговой цилиндр из вязко-упругого материала окружен лентой упругого материала; цилиндр и лента испытывают плоскую деформацию. Внутри цилиндра поддерживается давление $\Pi(t)$, а внешняя сторона ленты свободна от напряжения. Внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно равны a и b , а толщина ленты равна h , причем $h \ll b$. Нужно найти распределение напряжения в цилиндре. Найдем сначала решение для упругого цилиндра, а затем применим принцип соответствия для вязко-упругого цилиндра.

В каждой плоскости, нормальной к образующей цилиндра, возьмем плоские полярные координаты r, θ с началом координат на оси цилиндра. Пусть F_θ обозначает окружное усилие в ленте на единицу длины. Тогда условие равновесия ленты имеет вид

$$F_\theta = -b(\sigma_{rr})_{r=b}, \quad (11)$$

так как $-(\sigma_{rr})_{r=b}$ есть давление на поверхности соприкосновения ленты и цилиндра. Принимая во внимание, что $b \gg h$, окружную деформацию ленты можно приближенно представить как $F_\theta(1 - \nu_B^2)/hE_B$, где ν_B и E_B — упругие постоянные ленты. Окружная деформация цилиндра на поверхности соприкосновения с лентой равна

$$[\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}/(1 - \nu)]_{r=b}(1 - \nu^2)/E,$$

¹⁾ Результат принадлежит Вудворду и Радоку [1].

где ν и E — упругие постоянные цилиндра. В силу условия непрерывности обе деформации должны быть равны. Поэтому, исключая F_θ из выражения (11), найдем

$$\sigma_{rr} = \beta \sigma_{\theta\theta} \quad \text{при} \quad r = b, \quad (12)$$

где

$$\beta = \frac{1 - \nu^2}{\nu(1 + \nu) - (1 - \nu_B^2) b E / h E_B}. \quad (13)$$

Напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ внутри упругого цилиндра определяются формулами

$$\sigma_{rr} = A - B/r^2 \quad \text{и} \quad \sigma_{\theta\theta} = A + B/r^2,$$

где A и B — постоянные. Эти постоянные определяются из уравнения $\sigma_{rr} = -\Pi$ при $r = a$ и из условия (12).

Таким образом,

$$\sigma_{rr} = -\Pi \frac{\beta [(b^2/r^2) + 1] - [(b^2/r^2) - 1]}{\beta [(b^2/a^2) + 1] - [(b^2/a^2) - 1]} \quad (14)$$

и

$$\sigma_{\theta\theta} = \Pi \frac{\beta [(b^2/r^2) - 1] - [(b^2/r^2) + 1]}{\beta [(b^2/a^2) + 1] - [(b^2/a^2) - 1]}. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) определяют компоненты напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ в упругом цилиндре. Для того чтобы получить решение для вязко-упругого материала, применим сначала к этим выражениям преобразование Лапласа. Имеем

$$\bar{\sigma}_{rr} = -\bar{\Pi} \frac{\beta [(b^2/r^2) + 1] - [(b^2/r^2) - 1]}{\beta [(b^2/a^2) + 1] - [(b^2/a^2) - 1]}, \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \bar{\Pi} \frac{\beta [(b^2/r^2) - 1] - [(b^2/r^2) + 1]}{\beta [(b^2/a^2) + 1] - [(b^2/a^2) - 1]}, \quad (17)$$

где $\bar{\Pi}$ — преобразование Лапласа для Π , которое в общем случае будет функцией времени t . Заменяем затем упругие постоянные в (16) и (17) соответствующими модулями, зависящими от p . Теперь обе упругие постоянные цилиндра ν и E содержатся в коэффициенте β подобно тому, как это следует из (13). Из табл. 3.1 видно, что ν нужно заменить на $[Y_\nu(p) - Y_s(p)]/[2Y_\nu(p) + Y_s(p)]$, а E на $3[2Y_s(p) + 1/Y_\nu(p)]^{-1}$.

Таким образом, для вязко-упругого материала найдем

$$\beta(p) = \frac{Y_v(p) + 2Y_s(p)}{V_v(p) - Y_s(p) - (1/\alpha) Y_s(p) [2Y_v(p) + Y_s(p)]}, \quad (18)$$

где

$$\alpha = \frac{hE_B}{(1 - \nu_B^2)b} = \text{const.} \quad (19)$$

Подставим теперь значение β в (16) и (17). Обращение преобразований дает выражения, которые определяют σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ для вязко-упругого цилиндра.

В качестве примера рассмотрим цилиндр из несжимаемого материала, девиатору которого соответствует модель Фойгта. Цилиндр находится под внутренним давлением

$$\Pi(t) = \Pi_0 (1 - e^{-nt}) H(t). \quad (20)$$

Отсюда $Y_v(p) = \infty$, $Y_s(p) = Ap + B$, где A и B — постоянные, и

$$\bar{\Pi} = \Pi_0 \frac{n}{p+n}.$$

Из выражения (18) имеем

$$\beta(p) = \left[1 - \frac{2}{\alpha} (Ap + B) \right]^{-1}.$$

Подстановка значений $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ в формулы (16) и (17) дает

$$\bar{\sigma}_{rr} = - \frac{n\Pi_0 (Ap + B) [(b^2/r^2) - 1] + \alpha}{p(p+n) (Ap + B) [(b^2/a^2) - 1] + \alpha}$$

и

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{n\Pi_0}{p(p+n)}.$$

Обращая преобразования, получаем

$$\sigma_{rr} = - \Pi_0 \left\{ \frac{B [(b^2/r^2) - 1] + \alpha}{B [(b^2/a^2) - 1] + \alpha} - \frac{(B - nA) [(b^2/r^2) - 1] + \alpha}{(B - nA) [(b^2/a^2) - 1] + \alpha} e^{-nt} - \frac{nA\alpha [(b^2/a^2) - (b^2/r^2)] \exp \left\{ -t \frac{[B(b^2/a^2 - 1) + \alpha]}{[A(b^2/a^2 - 1)]} \right\}}{[B(\frac{b^2}{a^2} - 1) + \alpha] [(nA - B)(\frac{b^2}{a^2} - 1) - \alpha]} \right\} \quad (21)$$

и

$$\sigma_{\theta\theta} = \Pi_0 \left\{ \frac{B \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) - \alpha}{B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha} - \frac{(B - nA) \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) - \alpha}{(B - nA) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha} e^{-nt} + \right. \\ \left. + \frac{nA\alpha \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2} \right) \exp \left\{ -t \left[B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha \right] / A \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \right\}}{\left[B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha \right] \left[(nA - B) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) - \alpha \right]} \right\}. \quad (22)$$

Для конечного положительного n зависимость (20) определяет внутреннее давление, которое непрерывно возрастает от 0 до Π_0 . Если $n \rightarrow \infty$, то $\Pi(t) \rightarrow \Pi_0 H(t)$. Таким образом, напряжения, получающиеся при внезапном приложении внутреннего давления Π_0 , находятся как предел при $n \rightarrow \infty$ в выражениях (21) и (22). Имеем

$$\sigma_{rr} = -\Pi_0 \left\{ \frac{B \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) + \alpha}{B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2} \right)}{\left[B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha \right] \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \exp \left[- \frac{B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha}{A \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} t \right] \right\}, \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \Pi_0 \left\{ \frac{B \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) - \alpha}{B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2} \right)}{\left[B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha \right] \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \exp \left[- \frac{B \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + \alpha}{A \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} t \right] \right\}. \quad (24)$$

Вудворд и Радок [1] вычислили напряжения для $b/a = 2$, $A/B = 10^{-2}$ сек, $B \approx 4,68 \cdot 10^3$ кг/см² и стальной ленты, для которой $b/h = 33$, откуда $\alpha \approx 7,03 \cdot 10^4$ кг/см². На рис. 14 безразмерные значения $-\sigma_{rr}/\Pi_0$ и $-\sigma_{\theta\theta}/\Pi_0$

нанесены в зависимости от r/a для различных значений t согласно формулам (23) и (24). На рис. 15 построены графики для выражений (21) и (22) при $n \approx 300^{-1}$ сек.

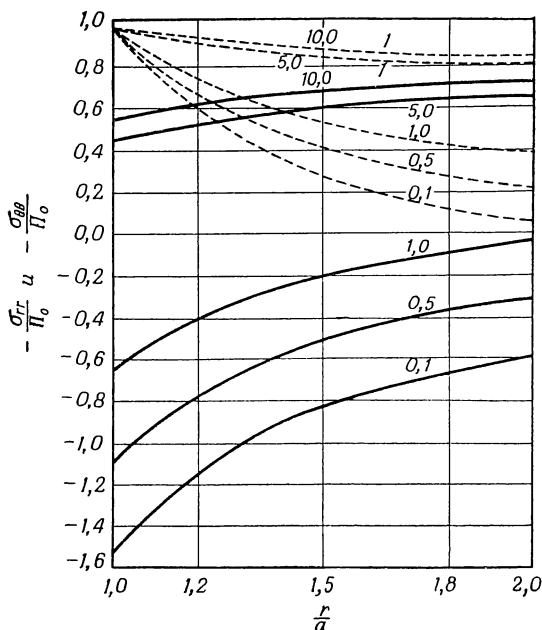


Рис. 14. Напряжения в армированном цилиндре из несжимаемого материала Фойгта. Давление внутри цилиндра равно $\Pi(t) = \Pi_0 H(t)$. Числа на кривых указывают время в миллисекундах. Пунктир относится к σ_{rr}/Π_0 ; сплошная линия соответствует $\sigma_{\theta\theta}/\Pi_0$

1 — установившееся состояние

В обоих случаях напряжения установившегося состояния равны напряжениям, полученным для цилиндра из несжимаемого упругого материала с модулем сдвига, равным $B/2 = 2340 \text{ кг/см}^2$.

Как видно из графиков, при внезапно приложенном давлении радиальное напряжение σ_{rr} является всегда сжимающим и возрастает по абсолютной величине во всех

точках. Окружное напряжение в начальный момент будет растягивающим, но оно монотонно уменьшается по модулю во всех точках. После 10 мсек оба напряжения

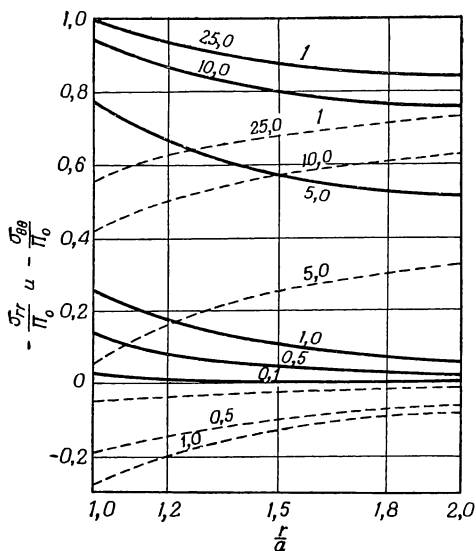


Рис. 15. Напряжения в армированном цилиндре из несжимаемого материала Фойгта. Давление внутри цилиндра равно $\Pi(t) = \Pi_0(1 - e^{-300t})H(t)$. Числа на кривых указывают время в миллисекундах. Пунктир относится к σ_{rr}/Π_0 ; сплошная линия соответствует $\sigma_{\theta\theta}/\Pi_0$

1 — установившееся состояние

почти достигают своих окончательных значений. Когда давление постепенно возрастает, то радиальное напряжение монотонно увеличивается по абсолютной величине, а окружное напряжение сначала по модулю растет, затем уменьшается, проходит через нуль и стремится в результате к своему окончательному отрицательному значению. В тех случаях, когда времена порядка миллисекунд имеют значение, например, для ракет, при кон-

струировании может быть важен тот факт, что напряжения в вязко-упругом цилиндре отличаются от напряжений в упругом цилиндре только в первые 20 мсек.

3. Сосредоточенная сила, приложенная на границе полупространства

В рассматриваемой задаче сосредоточенная сила $\Pi(t)$ приложена в фиксированной точке граничной плоскости полубесконечной вязко-упругой среды и направлена нормально к граничной плоскости. Возьмем цилиндрические координаты r, θ, z с началом в точке приложения силы и осью z , нормальной к граничной плоскости и направленной внутрь среды. Выражения для компонентов напряжения в упругом материале имеют вид (см. [2])

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\Pi(t)}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} \right\}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{3\Pi(t)}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\Pi(t)}{2\pi} (1-2\nu) \left\{ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right\}, \\ \sigma_{rz} &= -\frac{3\Pi(t)}{2\pi} r z^2 (r^2 + z^2)^{-5/2} \\ \text{и} \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{z\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Можно заметить, что только $\sigma_{\theta\theta}$ и первый член в уравнении для σ_{rr} зависят от упругих свойств материала через коэффициент $1-2\nu$, а компоненты напряжения σ_{zz} , σ_{rz} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{z\theta}$ и второй член в уравнении для σ_{rr} не зависят от упругих постоянных, и, следовательно, эти величины остаются без изменения для вязко-упругого материала. В частности, если материал несжимаем, т. е. коэффициент Пуассона $\nu=1/2$, уравнения, определяющие напряжения в вязко-упругом материале, совпадают с уравнениями для

напряжений в упругом материале. Напряжения зависят только от давления в данный момент и не зависят от предыдущей истории нагружения.

В общем случае для вязко-упругого материала напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ и первый член в уравнении для σ_{rr} , обозначенный через σ'_{rr} , могут быть найдены с помощью принципа соответствия. Обратившись к табл. 3.1, мы видим, что величина $1 - 2\nu$ должна быть заменена величиной

$$1 - 2 \frac{Y_v(p) - Y_s(p)}{2Y_v(p) + Y_s(p)} = \frac{3Y_s(p)}{2Y_v(p) + Y_s(p)}.$$

Преобразования Лапласа напряжений σ'_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ для вязко-упругого материала имеют, следовательно, вид

$$\bar{\sigma}'_{rr} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] \frac{3\bar{\Pi}(p) Y_s(p)}{2Y_v(p) + Y_s(p)}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \times \\ \times \frac{3\bar{\Pi}(p) Y_s(p)}{2Y_v(p) + Y_s(p)}. \end{aligned}$$

Обращение этих преобразований позволяет найти σ'_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$.

Следуя работе Ли [3], найдем обращения преобразований для материала, девиатору которого соответствует модель Фойгта, а объемная деформация которого упругая, т. е.

$$Y_s(p) = Ap + B \quad \text{и} \quad Y_v(p) = C, \quad (26)$$

где A , B и C — постоянные. Тогда

$$\frac{3Y_s(p)}{2Y_v(p) + Y_s(p)} = 3 \frac{Ap + B}{Ap + B + 2C}.$$

Обратное преобразование для $3(Ap + B)/(Ap + B + 2C)$ имеет вид

$$3\delta(t) = \frac{6C}{A} \exp \left\{ \frac{-(B + 2C)t}{A} \right\} H(t).$$

По теореме о свертке обратное преобразование для $3\bar{\Pi}(p)(Ap+B)/(Ap+B+2C)$ имеет вид

$$\int_0^t \left\{ 3\delta(\tau) - \frac{6C}{A} e^{-\frac{B+2C}{A}\tau} H(t) \right\} \Pi(t-\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\sigma'_{rr} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] \times \\ \times \left\{ 3\Pi(t) - \frac{6C}{A} \int_0^t e^{-\frac{B+2C}{A}\tau} \Pi(t-\tau) d\tau \right\}$$

и

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \times \\ \times \left\{ 3\Pi(t) - \frac{6C}{A} \int_0^t e^{-\frac{B+2C}{A}\tau} \Pi(t-\tau) d\tau \right\}.$$

В частном случае, при $\Pi(t) = \Pi_0 H(t)$ для вязко-упругого материала, который имеет зависящие от p модули, определяемые формулами (26), окончательные выражения для компонентов напряжения следующие:

$$\sigma_{rr} = \frac{3\Pi_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2C+B} \left[B + 2Ce^{-\frac{B+2C}{A}t} \right] \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] - r^2 z (r^2 + z^2)^{5/2} \left. \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{3\Pi_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2C+B} \left[B + 2Ce^{-\frac{B+2C}{A}t} \right] \times \right. \\ \times \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \left. \right\}, \quad (27)$$

а другие формулы для напряжений те же, что и выражение (25) при $\Pi(t) = \Pi_0$.

Компоненты перемещения u и w для упругой сплошной среды ($v \equiv 0$) даны Тимошенко [27]. Для получения компонентов перемещения вязко-упругого материала их можно исследовать таким же образом, как мы анализировали компоненты напряжения для вязко-упругого материала.

4. Сосредоточенная сила, движущаяся на границе полупространства

Решение, полученное в предыдущем параграфе, использовано Ли [3] для случая, когда сосредоточенная сила движется вдоль прямой, лежащей на граничной плоскости. Ли принимает эту прямую за ось x и для упрощения рассматривает только компонент напряжения σ_{xx} в точке на плоскости, где $y=0$. Если точка приложения силы движется так, что ее координата x задана, $x=\xi(t)$, то нормальное напряжение на плоскости в любой точке в любой момент времени может быть записано в виде

$$p(x, y, t) = \Pi(t) \delta[x - \xi(t)] \delta(y). \quad (28)$$

Теперь напряжение в упругом материале, на который действует давление, определяемое выражением (28), зависит только от напряжения в данный момент и, следовательно, определяется уравнениями предыдущего параграфа. В частности, напряжение σ_{xx} при $y=0$ равно напряжению σ_{rr} , ранее найденному для сосредоточенной силы, приложенной в точке $(\xi(t), 0, 0)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx})_{y=0} = \frac{\Pi(t)}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{(x-\xi)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{z}{(x-\xi)^2} [(x-\xi)^2 + z^2]^{-1/2} \right] - 3(x-\xi)^2 z [(x-\xi)^2 + z^2]^{-5/2} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

По принципу соответствия для полубесконечной вязко-упругой плоской среды, на которую действует нормальное напряжение, определяемое формулой (28), решение получается применением к выражению (29) преобразования Лапласа (с учетом того, что ξ есть функция t), заменой модулей упругости соответствующими модулями, зависящими от p , и, наконец, обращением преобразования.

Для вязко-упругого материала, который имеет модули, зависящие от p и определяемые формулами (26), приме-

нение теоремы о свертке дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{xx})_{y=0} = & \frac{3}{2\pi} \Pi(t) \left\{ \frac{1}{[x - \xi(t)]^2} - \frac{z}{[x - \xi(t)]^2} \times \right. \\
 & \times \{ [x - \xi(t)]^2 + z^2 \}^{-1/2} - z [x - \xi(t)]^2 \{ [x - \xi(t)]^2 + z^2 \}^{-5/2} \Big\} - \\
 & - \frac{3C}{\pi A} \int_0^t d\tau e^{-\frac{2C+B}{A}\tau} \Pi(t-\tau) \left\{ \frac{1}{[x - \xi(t-\tau)]^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{z}{[x - \xi(t-\tau)]^2} \{ [x - \xi(t-\tau)]^2 + z^2 \}^{-1/2} \right\}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Метод, использованный в этом параграфе, может быть применен также для вычисления напряжения и перемещения, возникающих в материале дороги (который в первом приближении можно считать линейным вязко-упругим материалом) при движении автомобиля по прямой, на поверхности дороги. Автомобиль заменяется четырьмя вершинами прямоугольника, в которых приложены сосредоточенные силы; напряжения и перемещения, производимые этими четырьмя движущимися сосредоточенными силами, суммируются.

5. Другая форма принципа соответствия

Если зависимости между напряжением и деформацией используются в дифференциальной форме, то основные уравнения квазистатической задачи принимают вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \\
 \sigma_{ij,j} + \rho X_i &= 0, \\
 P_v(D) \sigma_{kk} &= Q_v(D) \varepsilon_{kk} \text{ и } P_s(D) s_{ij} = Q_s(D) e_{ij}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

где каждая пара операторов $P_v(D)$, $Q_v(D)$ и $P_s(D)$, $Q_s(D)$ удовлетворяет условиям, выведенным в § 8 гл. 2. Производные по времени входят только в соотношения (31), а производные по пространственным координатам x_i входят только в формулу (1) и уравнение (2). Если одна из зависимых переменных дифференцируется или интегрируется по времени или по пространственной координате, то порядок дифференцирования или интегрирования не имеет значения. Следовательно, если возможно разрешить си-

стему (1), (2) и (31) относительно каждой зависимой переменной, рассматривая при этом дифференциальные операторы $P_v(D)$, $Q_v(D)$, $P_s(D)$ и $Q_s(D)$ как постоянные и используя пространственные граничные условия в момент времени t , то уравнение, полученное в результате, будет обыкновенным дифференциальным уравнением с независимой временной переменной t . Сначала исключаются все дифференцирования и интегрирования по пространственным координатам, а дифференцирования и интегрирования по временам останутся до конца решения.

Основные уравнения для упругого твердого тела совпадают с уравнениями (1), (2) и (31), за исключением дроби $Q_v(D)/P_v(D)$, которая заменяется на $3k$, и дроби $Q_s(D)/P_s(D)$, которая заменяется на 2μ . Решение для упругого тела совпадает, следовательно, с той частью решения для вязко-упругого тела, которая зависит от пространственных координат, так как производные по времени не входят в основные уравнения для упругого тела. Итак, вторая форма принципа соответствия для квазистатической задачи формулируется следующим образом.

„Если частная квазистатическая задача для упругого тела может быть решена относительно одной из зависимых переменных в любой момент времени t , то эта переменная в решении для вязко-упругого тела удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, получаемому заменой упругих постоянных в решении для упругого тела соответствующими дифференциальными операторами, определяющими зависимость между напряжением и деформацией“.

Соответствующие операторы берутся из табл. 3.1. В этой таблице Y_v нужно заменить на $Q_v(D)/P_v(D)$, а Y_s на $Q_s(D)/P_s(D)$.

Эта форма принципа соответствия более общая, чем данная ранее, так как дает возможность определить положение границ в функции времени. Применение принципа соответствия во второй форме будет показано на трех примерах, которые даны в следующих двух параграфах и непосредственно ниже для повторного решения задачи, рассмотренной в § 4.

Решение для упругого материала дано в § 4 и представлено формулой (29). Для вязко-упругого материала,

который имеет модули, зависящие от p и определяемые выражениями (26), множитель $1 - 2\nu$ должен быть заменен на

$$\frac{3Y_s(D)}{2Y_v(D) + Y_s(D)} = 3 \frac{AD + B}{AD + B + 2C}.$$

Следовательно, для вязко-упругого материала напряжение $(\sigma_{xx})_{y=0}$ равно

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx})_{y=0} = & \frac{3}{2\pi} \frac{AD + B}{AD + B + 2C} \left\{ \Pi(t) \left[\frac{1}{[x - \xi(t)]^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{z}{[x - \xi(t)]^2} \{ [x - \xi(t)]^2 + z^2 \}^{-1/2} \right] \right\} - \\ & - \frac{3\Pi(t)}{2\pi} [x - \xi(t)]^2 z \{ [x - \xi(t)]^2 + z^2 \}^{-5/2}, \end{aligned}$$

а формула (30) выводится непосредственно из теории линейных операторов.

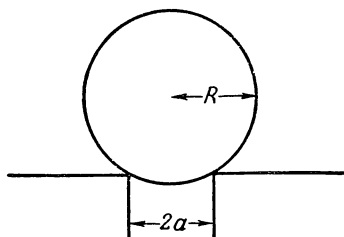
6. Вдавливание гладкой жесткой сферы в несжимаемое полупространство

Решение этой задачи дано Ли и Радоком [4]. В данном случае граничные условия на плоскости, ограничивающей полупространство, изменяются при вдавлении сферы. На поверхности контакта сферы и полупространства граничные условия определяют заданные перемещения и равенство нулю тангенциальных напряжений. На свободной части граничной поверхности тангенциальные напряжения и нормальные напряжения должны быть равны нулю. Принцип соответствия не может быть применен в той форме, в которой он дан в § 1, так как граница подвижная.

При решении задачи для упругого полупространства эта трудность не возникает, так как это решение зависит только от конфигурации системы в данный момент. Зависимость между радиусом контакта $a(t)$ и суммарной нормальной силой давления сферы на полупространство определяется выражением

$$\Pi(t) = \frac{16\mu}{3R} [a(t)]^3, \quad (32)$$

где R — радиус сферы, μ — модуль сдвига упругого материала, заполняющего полупространство; считается, что материал несжимаем. Этот результат может быть получен из теории контакта двух упругих сфер [5].



Р и с. 16

Рассмотрим теперь гладкую жесткую сферу, расположенную на границе полупространства, заполненного вязко-упругим материалом; при этом радиус контакта постепенно возрастает во времени. Радиус контакта и граничные условия в любой момент времени для упругого полупространства те же, что и для вязко-упругого полупространства, но соответствующая задача для упругого пространства в каждый момент времени отличается от задачи для вязко-упругого полупространства. Основные дифференциальные уравнения для этих двух задач отличаются только тем, что зависимость между девиаторами напряжения и деформации для упругого материала имеет вид

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij},$$

а для вязко-упругого материала эта зависимость дана посредством (31). Таким образом, для вязко-упругого материала с помощью принципа соответствия, в форме, данной в предыдущем параграфе, и табл. 3.1, получим выражение

$$P_s(D) \Pi(t) = \frac{8}{3R} Q_s(D) [a(t)]^3. \quad (33)$$

Следовательно, получена одна зависимость между силой $\Pi(t)$ и радиусом контакта $a(t)$. Другое соотношение между этими величинами устанавливается частью граничных условий. Однако, если используется уравнение (33),

нельзя наложить произвольное условие на одну из функций $\Pi(t)$ или $a(t)$. Для упругого полупространства всегда существует решение задачи. Соответствующее решение для вязко-упругого полупространства будет неверным, если оно дает отрицательное контактное давление между сферой и полупространством в какой-либо точке или если нормальное смещение на границе таково, что оно пересекает пространство, занимаемое сферой.

Рассмотрим случай, когда сила давления сферы на полупространство равна весу сферы Π_0 . Если сфера положена на границу в момент $t = 0$, то

$$\Pi(t) = \Pi_0 H(t). \quad (34)$$

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к (33) и (34), найдем

$$P_s(p) \bar{\Pi} = \frac{8}{3R} Q_s(p) \bar{a}^3 \quad (35)$$

и

$$\bar{\Pi} = \Pi_0/p. \quad (36)$$

Исключение $\bar{\Pi}$ из (35) и (36) и использование формулы (5) дает

$$\bar{a}^3 = \frac{3R\Pi_0}{8} \frac{P_s(p)}{pQ_s(p)} = \frac{3R\Pi_0}{8} \frac{J_s(p)}{p}.$$

Но $J_s(p)/p$ есть преобразование Лапласа для деформации, вызванной напряжением $H(t)$. Следовательно,

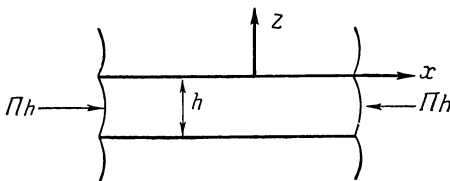
$$a^3(t) = \frac{3R\Pi_0}{8} \left(\frac{1}{E_s} + \frac{1}{\eta_s} t + \psi_s(t) \right), \quad (37)$$

где E_s — мгновенный модуль упругости, η_s — коэффициент вязкости при установившемся течении, $\psi_s(t)$ — функция ползучести для дивизора напряжения. В частном случае для полубесконечной несжимаемой среды Максвелла имеем $(D/E + 1/\eta) s_{ij} = e_{ij}$; сфера мгновенно погружается в среду на глубину, соответствующую упругой деформации, а затем глубина погружения непрерывно возрастает с постоянной скоростью. Для полубесконечной несжимаемой среды Фойгта имеем $s_{ij} = (\eta D + E) e_{ij}$; проникание в начальный момент равно нулю, а затем асимптотически приближается для больших значений времени к глубине погружения,

соответствующей упругой среде. Выражение (37) можно использовать для экспериментального определения функции ползучести для несжимаемого материала, если глубина погружения сферы за длительный период времени мала.

7. Задача устойчивости, рассмотренная Био

Био [6] рассмотрел задачу об устойчивости вязко-упругой пластины постоянной толщины, которая является



Р и с. 17. Сжатие вязко-упругой пластины, расположенной между двумя слоями

прослойкой в бесконечном слое другого вязко-упругого материала и подвергается сжимающему нормальному напряжению Π , направленному параллельно пластине. Направление напряжения Π принимается за ось x , а нормаль к пластине — за ось z . Предполагается, что трение между пластиной и окружающим ее слоем отсутствует, поэтому давление, вызванное взаимодействием, нормально к граничной поверхности. Обозначим суммарное давление слоя на пластину через q , а перемещение пластины через w ; пусть q и w направлены параллельно оси z . Тогда для упругой пластины имеем

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^4 w}{dx^4} + \Pi h \frac{d^2 w}{dx^2} = q, \quad (38)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона для материала пластины. Давление q и перемещение w связаны также уравнениями для деформации. Принимаем, что на полубесконечную пластину действует поверхностная нагрузка, синусоидально зависящая от x :

$$q' = q_0 \cos lx,$$

тогда нормальное перемещение пластины будет тоже синусоидальным

$$w = w_0 \cos lx. \quad (39)$$

Если окружающая пластину среда упругая с постоянными E_1 и ν_1 , тогда (см., например, [7])

$$w = 2q' \frac{1 - \nu_1^2}{E_1 l}. \quad (40)$$

Теперь q' есть сила, действующая на единицу площади с одной стороны пластины, следовательно,

$$q = -2q', \quad (41)$$

так как пластина окружена внешней средой с обеих сторон. Если пластина соприкасается с внешней средой только с одной стороны, то другая сторона свободна от напряжений и $q = -q'$.

Выражая q через w с помощью (40) и (41) и подставляя найденное значение в уравнение (38), получаем

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^4 w}{dx^4} + \Pi h \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{E_1 l}{1-\nu_1^2} w = 0. \quad (42)$$

Внося сюда решение (39), найдем

$$\frac{Eh^3 l^4}{12(1-\nu^2)} - \Pi h l^2 + \frac{E_1 l}{1-\nu_1^2} = 0. \quad (43)$$

Мы получили характеристическое уравнение для длины волны $L = 2\pi/l$ деформации упругой пластины, окруженной упругой средой. Уравнение (43) является кубическим уравнением относительно Πh . Наименьшее положительное значение напряжения Π , соответствующее положительному действительному корню lh , равно

$$\Pi_{cr} = \frac{3}{2} \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(\frac{E(1-\nu_1^2)}{6E_1(1-\nu^2)} \right)^{1/3}. \quad (44)$$

для которого

$$l_{cr}h = \left(\frac{6E_1(1-\nu^2)}{E(1-\nu_1^2)} \right)^{1/3}, \quad (45)$$

следовательно,

$$\Pi_{cr} = \frac{3}{2} \frac{E_1}{(1-\nu_1^2) l_{cr}h}. \quad (46)$$

Для вязко-упругой пластины в вязко-упругой среде, по принципу соответствия и с помощью табл. 3.1, найдем, что $E/(1-\nu^2)$ должно быть заменено на $B(D)$, где

$$B(D) = \frac{[2Y_v(D) + Y_s(D)] Y_s(D)}{Y_v(D) + 2Y_s(D)}, \quad (47)$$

а $E_1/(1-\nu_1^2)$ должно быть заменено на $B_1(D)$, где

$$B_1(D) = \frac{[2Y_{v1}(D) + Y_{s1}(D)] Y_{s1}(D)}{Y_{v1}(D) + 2Y_{s1}(D)}. \quad (48)$$

Характеристическое уравнение (43) принимает теперь вид

$$\frac{1}{12} B(D) l^3 h^3 - \Pi l h + B_1(D) = 0. \quad (49)$$

Это уравнение можно рассматривать как зависимость между Π , l и зависящим от времени параметром D . Положительным значениям параметра D соответствуют смещения, которые имеют зависящий от времени множитель e^{Dt} . Таким образом, уравнение, идентичное уравнению (49), может быть получено, если предположить, что $w = f(x) e^{Dt}$, где D — положительная постоянная, следовательно, D есть мера скорости возрастания деформации. Можно ожидать, что при возникновении неустойчивого равновесия будет наблюдаться конфигурация, которая имеет наибольшую скорость возрастания деформации; соответствующая длина волны называется *доминантной длиной волны* и обозначается L_d . Из (47), (48) и (2.86) следует, что $B(D)$ и $B_1(D)$ — монотонно возрастающие функции D . Для фиксированного значения Π наибольшее значение D , соответствующее положительному действи-

тельному корню lh уравнения (49), определяется выражением

$$[B_1(D)]^2 B(D) = \frac{16}{9} \Pi^3. \quad (50)$$

Соответствующее значение длины волны равно $L_d = 2\pi/l_d$, где

$$l_d h = \left(\frac{6B_1(D)}{B(D)} \right)^{1/3} \quad (51)$$

или

$$L_d = 2\pi h \left(\frac{B(D)}{6B_1(D)} \right)^{1/3}. \quad (52)$$

Как и в случае упругого материала, теория справедлива только при условии, что $L_d \gg h$.

Из (50) следует, что при условии, если $B_1(0) \neq 0$, $B(0) \neq 0$ и $\Pi_0^3 = \frac{9}{16} [B_1(0)]^2 B(0)$, пластина устойчива для любого напряжения $\Pi < \Pi_0$. При $\Pi = \Pi_0$ пластина неустойчива, но скорость возрастания деформации равна нулю. Если $B_1(\infty)$ и $B(\infty)$ конечны, а $\Pi_\infty^3 = \frac{9}{16} [B_1(\infty)]^2 B(\infty)$, то для любого $\Pi \geq \Pi_\infty$ скорость деформации бесконечна и деформация, следовательно, будет упругой. Если $B(D) = CB_1(D)$, где C — постоянная, то доминантная длина волн не зависит от давления и пластина все время деформируется одинаковым образом. Однако если $B(D) \neq CB_1(D)$ для любого постоянного C , то характер деформации зависит от давления. Если $\Pi_0 < \Pi_1 < \Pi_2 < \Pi_\infty$ и давления Π_1 и Π_2 приложены последовательно, то результирующая деформация равна сумме двух синусоидальных волн, длины которых определяются формулами (50) и (52), если в них соответственно положить $\Pi = \Pi_1$ и $\Pi = \Pi_2$. Примеры частных видов деформации, встречающихся на практике, для вязко-упругих материалов пластины и внешней среды даны Био [6]. Мы отсылаем читателя к этой статье. Результаты, полученные Био, можно приложить к пластикам, слоистым панелям, металлам при высокой температуре и к слоистым геологическим формациям. Недавно Био получил решение для случая, когда имеется гравитационное поле, действующее нормально к слою [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Woodward W. B., Radok J. R. M., Brown University Technical Report PA—TR—14, 1955.
2. Timoshenko S., Theory of elasticity (Section 105, McGraw-Hill, 1934). Русский перевод: Тимошенко С. П., Теория упругости, ГТТИ, М., 1934.
3. Lee E. H., Stress analysis in viscoelastic bodies, *Quart. Appl. Math.*, **13**, № 2, 183—190 (1955).
4. Lee E. H., Radok J. R. M., Stress analysis in linearly viscoelastic materials. IX Congrès International De Mécanique Appliquée, v. V, 321—329, Université De Bruxelles, 1957.
5. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity, Second Edition (Section 126, McGraw-Hill, 1957).
6. Biot M. A., Folding instability of layered viscoelastic medium under compression, *Proc. Roy. Soc.*, **A242**, № 1231, 444—453 (1958).
7. Biot M. A., *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, **59**, A1—A7 (1937).
8. Biot M. A., The influence of gravity of folding of a layered viscoelastic medium under compression, *J. Franklin Inst.*, **267**, № 3, 211—227 (1959).

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ III. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Принцип соответствия

В этой главе, так же как в гл. 4, рассматривается определение напряжения и перемещений в вязко-упругом теле, которое в начальный момент находится в состоянии покоя, т. е. $\sigma_{ij} \equiv 0$, $u_i \equiv 0$ при $t < 0$, но теперь инерционные члены включаются в уравнения движения. Основные уравнения берутся в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$P_v(D) \sigma_{kk} = Q_v(D) \varepsilon_{kk} \text{ и } P_s(D) s_{ij} = Q_s(D) e_{ij}. \quad (3)$$

Производные по времени входят в уравнения (2), и, следовательно, принцип соответствия теперь не применим в той форме, которая была дана для квазистатических задач в § 5 предыдущей главы. В задачах, связанных с ударом, разложение приложенных сил в ряд Фурье имеет большое число членов высокой частоты или малого периода. Так как экспериментально измеряемые при таких условиях свойства материалов описываются комплексными модулями и податливостями, для решения системы (1) — (3) нужно выразить свойства материалов через эти функции. Это можно сделать с помощью одностороннего преобразования Фурье.

Одностороннее преобразование Фурье функции $f(t)$ определяется следующим образом¹⁾:

$$\bar{f}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (4)$$

¹⁾ В этой главе \bar{f} обозначает одностороннее преобразование Фурье.

Обратное преобразование имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{i\omega t} \bar{f}(\omega) d\omega \right]. \quad (5)$$

Если $f(t) = 0$ при $t < 0$, то

$$\int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{df(t)}{dt} dt = |f(t) e^{-i\omega t}|_0^{\infty} + i\omega \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = i\omega \bar{f}(\omega).$$

Здесь учтено предположение, которое делается в этой главе, а именно $f(t) e^{-i\omega t}$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. С помощью индукции можно показать, что преобразование производной $d^n f(t)/dt^n$ есть $(i\omega)^n \bar{f}(t)$. Отсюда следует,

что преобразование суммы $\sum_{r=0}^n a_r d^r f(t)/dt^r$ есть $\sum_{r=0}^n a_r (i\omega)^r \bar{f}(\omega)$.

Таким образом, если преобразование применяется к соотношениям (3), то

$$P_v(i\omega) \bar{\sigma}_{kk} = Q_v(i\omega) \bar{\epsilon}_{kk} \text{ и } P_s(i\omega) \bar{s}_{ij} = Q_s(i\omega) \bar{e}_{ij}.$$

Но

$$Q_v(i\omega)/P_v(i\omega) = Y_v(i\omega) \text{ и } Q_s(i\omega)/P_s(i\omega) = Y_s(i\omega),$$

где Y_v и Y_s — комплексные модули. Следовательно,

$$\bar{\sigma}_{kk} = Y_v(i\omega) \bar{\epsilon}_{kk} \text{ и } \bar{s}_{ij} = Y_s(i\omega) \bar{e}_{ij}. \quad (6)$$

Применив одностороннее преобразование Фурье, выразим зависимость между напряжением и деформацией в желаемой форме.

Если преобразование Фурье применить к формуле (1) и уравнению (2), то в результате получим

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j}) \quad (7)$$

и

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \rho \bar{X}_i + \rho \omega^2 \bar{u}_i = 0. \quad (8)$$

Основные уравнения для упругого тела отличаются от системы (1), (2) и (3) только тем, что зависимости (3) заменяются соотношениями $\sigma_{kk} = 3k\epsilon_{kk}$ и $s_{ij} = 2\mu e_{ij}$. Их преобразования отличаются только тем, что $Y_v(i\omega)$ и $Y_s(i\omega)$ заменяются соответственно на $3k$ и 2μ . Следова-

тельно, принцип соответствия для динамических задач можно формулировать так.

„Решение динамической задачи для вязко-упругого материала можно получить из решения соответствующей задачи для упругого тела приложением одностороннего преобразования Фурье к решению, полученному для упругого материала, заменой упругих постоянных соответствующими вязко-упругими комплексными модулями или податливостями и обращением преобразования“.

Понятно, что граничные условия для двух задач должны быть одинаковыми и что в каждой задаче инерционный член может быть выражен в форме $\partial^2 u_i / \partial t^2$.

С первого взгляда может показаться, что этот принцип дает возможность решить большое число динамических задач, встречающихся в вязкой упругости. К сожалению, это не так, потому что в теории упругости решено мало динамических задач. Задачи синусоидальных колебаний исключаются из рассмотрения условием о том, что материал в начальный момент находится в состоянии покоя. Положение в данном случае противоположно тому, что мы имели в случае квазистатических задач вязкой упругости, для которых соответствующие задачи упругости являются статическими и для них известно много частных решений. Динамические задачи большей частью сводятся к исследованию распространения продольных волн вдоль стержня. Эта задача рассмотрена в следующем параграфе с помощью принципа соответствия и без него. Принцип соответствия будет применен для исследования радиального симметричного удара по сферической полости и в заключение — к радиально-симметричному удару по пластине.

2. Распространение продольных волн вдоль полубесконечного стержня

Далее применяется одномерная теория распространения волн в стержнях. Теорию можно считать удовлетворительной при условии, что длина волны возмущения велика сравнительно с характерным диаметром стержня¹⁾. Эта

¹⁾ См., например, книгу [1], в которой показано, что теория является удовлетворительной для стержней круглого поперечного сечения, если отношение радиуса к длине волны меньше 0,1.

же теория, только с измененными модулями, описывает распространение плоских волн расширения в направлении нормали к плоской поверхности полубесконечной среды. В рассмотренном ниже случае не содержится ограничений на длину волны.

Координатные оси выбираются так, что ось x лежит вдоль стержня, а начало координат совпадает с концом стержня. Предполагается, что в соответствии с выбранными осями координат все компоненты напряжения равны нулю, за исключением нормальной компоненты, параллельной оси x , которая обозначается σ . Пусть ε представляет собой нормальную компоненту деформации, а u — компоненту перемещения, параллельную оси x .

Основные уравнения для вязко-упругого материала имеют вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon. \quad (9)$$

Из табл. 3.1, учитывая, что соответствующий модуль для упругого стержня есть модуль Юнга, найдем

$$\begin{aligned} \frac{Q(D)}{P(D)} &= 3 \left(\frac{2P_s(D)}{Q_s(D)} + \frac{P_v(D)}{Q_v(D)} \right)^{-1} = \\ &= \frac{3Q_s(D)Q_v(D)}{2P_s(D)Q_v(D) + P_v(D)Q_s(D)}. \end{aligned}$$

Исключение σ и ε дает уравнение

$$\rho D^2 P(D) u = Q(D) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Пусть многочлен $P(D)$ имеет степень n по D . Из § 8 гл. 2 следует, что многочлены $Q_s(D)$ и $Q_v(D)$ имеют степени, равные степеням многочленов $P_s(D)$ и $P_v(D)$ или соответственно на единицу большую степень. Если оба многочлена имеют степени на единицу больше, то многочлен $Q(D)$ имеет степень $n+1$ и производная высшего порядка, входящая в уравнение (10), равна $\partial^{n+3}u/\partial t^{n+1}\partial x^2$. В этом случае линии $t = \text{const}$ (дважды) и $x = \text{const}$ ($n+1$ раз) являются характеристиками уравнения (10), и, следовательно, возмущение в каждой точке стержня мгновенно оказывает влияние на все точки стержня. Иначе говоря, степени многочленов $Q(D)$ и $P(D)$ равны и произ-

водные высшего порядка, входящие в уравнение (10), имеют вид

$$q_n \frac{\partial^{n+2} u}{\partial t^n \partial x^2} - \rho p_n \frac{\partial^{n+2} u}{\partial t^{n+2}},$$

где q_n и p_n — коэффициенты членов высших степеней в многочленах P и Q .

Линии $x \pm \sqrt{q_n/\rho p_n} t = \text{const}$ (каждая один раз) и $x = \text{const}$ (n раз) являются характеристиками уравнения. Возмущение в точке на стержне не оказывает влияния на расстоянии L , пока не пройдет время $L \sqrt{\rho p_n/q_n}$. Равенство или неравенство степеней многочленов $P(D)$ и $Q(D)$ соответствует случаям, когда материал при простом растяжении имеет мгновенную деформацию или не имеет мгновенной деформации. Так как все реальные материалы имеют некоторую мгновенную упругость, то мгновенная передача возмущения практически невозможна. Для более детального исследования решения, учитывающего мгновенную упругость, применим принцип соответствия.

Для упругого стержня уравнение (10) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (11)$$

решение которого

$$u = f(x - ct) + g(x + ct),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции x , и

$$c^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (12)$$

Для однородного полубесконечного стержня, к которому приложена только сила или задано перемещение на конце $x = 0$, имеем $g(x + ct) = 0$ и

$$u = f(x - ct).$$

Откуда

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x - ct), \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - ct), \\ \sigma &= E\varepsilon = Ef'(x - ct). \end{aligned} \quad (13)$$

Вид функции f определяется граничными условиями на конце стержня $x=0$. Рассмотрим влияние импульсивно приложенного давления¹⁾.

Если импульс величины I приложен к концу стержня $x=0$ в момент $t=0$, то граничное условие имеет вид

$$\sigma_{x=0} = -I\delta(t).$$

Подставляя из (13) значение σ для упругого стержня, получаем

$$Ef'(-ct) = -I\delta(t).$$

Интегрирование по времени дает

$$\begin{aligned} u &= f(x-ct) = \frac{cI}{E} H\left(t - \frac{x}{c}\right), \\ v &= \frac{cI}{E} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right), \\ \varepsilon &= -\frac{I}{E} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ и } \sigma = -I\delta\left(t - \frac{x}{c}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Найдем теперь напряжение для вязко-упругого стержня. Применяя одностороннее преобразование Фурье к напряжению, определяемому выражением (14), имеем

$$\bar{\sigma} = -I \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) dt = -I e^{-i\omega x/c}.$$

Заменяя c на $[\rho J(i\omega)]^{-1/2}$, получаем преобразование для напряжения в вязко-упругом стержне

$$\bar{\sigma} = -I \exp[-i\omega x \sqrt{\rho J(i\omega)}],$$

а само напряжение равно

$$\sigma = -\frac{I}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{i\omega [t - \sqrt{\rho J(i\omega)} x]} d\omega \right], \quad (15)$$

¹⁾ Влияние постоянной скорости, приложенной в момент $t=0$, рассматривалось Ли и Кантором [2], Моррисоном [3], Ли и Моррисоном [4].

Для материала Максвелла $J(i\omega) = 1/E + 1/i\omega\eta$. После подстановки значения $J(i\omega)$ в формулу (15) найдем

$$\sigma = -Ie^{-\frac{E}{2\eta}t} \left\{ \delta \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} x \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\rho E} x}{2\eta} \left[I_1 \left(\frac{E}{2\eta} \sqrt{t^2 - \frac{\rho}{E} x^2} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(t^2 - \frac{\rho}{E} x^2 \right)^{-1/2} H \left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} x \right) \right\}, \quad (16)$$

где I_1 — функция Бесселя первого порядка от мнимого аргумента. Импульс распространяется со скоростью $\sqrt{E/\rho}$ и затуханием $\sqrt{\rho E/2\eta}$; за ним следует волна напряжения конечной амплитуды. В общем случае для вязко-упругих материалов, имеющих мгновенную упругость, необходимо применить асимптотическое разложение функции $\sqrt{\rho J(i\omega)}$. Имеем

$$J(i\omega) = \frac{p_n(i\omega)^n + p_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + p_0}{q_n(i\omega)^n + q_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + q_0},$$

отсюда

$$J(i\omega) \approx \frac{p_n}{q_n} \left\{ 1 - \frac{i}{\omega} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{p_{n-2}}{p_n} + \frac{q_{n-2}}{q_n} - \frac{q_{n-1}^2}{q_n^2} + \frac{p_{n-1}q_{n-1}}{p_n q_n} \right) + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right\}$$

и

$$\sqrt{\rho J(i\omega)} \approx \sqrt{\rho \frac{p_n}{q_n}} \left\{ 1 - \frac{i}{2\omega} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{p_{n-1}^2}{p_n^2} - \frac{3q_{n-1}^2}{q_n^2} + 2 \frac{p_{n-1}}{p_n} \frac{q_{n-1}}{q_n} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \frac{p_{n-2}}{p_n} + 4 \frac{q_{n-2}}{q_n} \right) + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right\}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\rho J(i\omega)} \approx \alpha - \frac{i\beta}{\omega} + \frac{\gamma}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \quad (17)$$

где

$$J(i\omega) = J_1(\omega) - iJ_2(\omega).$$

Тогда

$$\alpha = \sqrt{\rho \frac{p_n}{q_n}} = \sqrt{\rho \lim_{\omega \rightarrow \infty} J_1}, \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\rho \frac{p_n}{q_n} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)} = \frac{\rho}{2\alpha} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega J_2 \quad (19)$$

и

$$\gamma = \frac{\rho}{2\alpha} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \left(J_1 - \frac{p_n}{q_n} \right) + \frac{\beta^2}{2\alpha}. \quad (20)$$

Для материала, обладающего мгновенной упругостью, применение теории характеристик показывает, что волновой фронт создается любым возмущением, перемещающимся со скоростью $1/\alpha$. Так как напряжение, приложенное в точке $x=0$, есть дельта-функция, то решение нужно искать в форме

$$\sigma(x, t) = -I g(x) \delta(t - \alpha x) - I f(x, t) H(t - \alpha x). \quad (21)$$

Теперь

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-i\omega \alpha x - \beta x} d\omega \right] = e^{-\beta x} \delta(t - \alpha x), \quad (22)$$

и, следовательно, можно показать, что интеграл

$$\begin{aligned} f(x, t) H(t - \alpha x) = \\ = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} e^{i\omega t} [e^{-i\omega \sqrt{\rho J(i\omega)} x} - e^{-i\omega \alpha x - \beta x}] d\omega \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

сходится для всех конечных значений x и t . Тогда напряжение $\sigma(x, t)$ определяется зависимостью (21), в которой $g(x) = e^{-\beta x}$ и $f(x, t)$ конечны для всех конечных значений x и t , удовлетворяющих условию $(t - \alpha x) \geq 0$.

Доказательство сходимости интеграла в (23) равносильно доказательству того, что, выбирая достаточно большое Λ , интеграл

$$I_{\Lambda} = \int_{\Lambda}^{\infty} e^{i\omega t} (e^{-i\omega \sqrt{\rho J(i\omega)} x} - e^{-i\omega \alpha x - \beta x}) d\omega$$

можно сделать произвольно малым для всех положительных конечных значений x и t . Используя формулу (17), получаем

$$\begin{aligned} e^{-i\omega \sqrt{\rho J(i\omega)} x} &\approx \exp \left[-i\omega x \left\{ \alpha + \frac{\beta}{i\omega} + \frac{\gamma}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right\} \right] \approx \\ &\approx \exp[-i\omega \alpha x - \beta x] \exp \left[\frac{\gamma x}{i\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right] \approx \\ &\approx \exp[-i\omega \alpha x - \beta x] \left\{ 1 + \frac{\gamma x}{i\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$I_{\Lambda} \approx \int_{\Lambda}^{\infty} e^{i\omega(t-\alpha x)} e^{-\beta x} \left[\frac{\gamma x}{i\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right] d\omega.$$

Но интеграл

$$\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{\omega} e^{i\omega(t-\alpha x)} d\omega$$

сходится для всех действительных значений $t - \alpha x$, а интеграл

$$\int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} e^{i\omega(t-\alpha x)} d\omega$$

абсолютно сходится для всех действительных значений $t - \alpha x$, и, следовательно, интеграл I_{Λ} может быть сделан произвольно малым путем увеличения Λ .

Разложение (17) может быть продолжено, это дает

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho J(i\omega)} &\approx \alpha - \frac{i\beta}{\omega} + \frac{\gamma}{\omega^2} - \frac{i\lambda}{\omega^3} + \frac{\varepsilon}{\omega^4} + \dots, \\ e^{-i\omega \sqrt{\rho J(i\omega)} x} &\approx e^{-i\omega \alpha x - \beta x} \exp \left[\left(\frac{\gamma x}{i\omega} - \frac{\lambda x}{\omega^2} \right) + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right] \approx \\ &\approx e^{-i\omega \alpha x - \beta x} \left\{ 1 + \frac{\gamma x}{i\omega} - \left(\lambda x + \frac{\gamma^2 x^2}{2} \right) \frac{1}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, для подынтегральной функции в (23) получаем разложение

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} [e^{-i\omega \sqrt{\rho J(i\omega)} x} - e^{-i\omega \alpha x - \beta x}] &\approx \\ &\approx e^{-\beta x} e^{i\omega(t-\alpha x)} \left[\frac{\gamma x}{i\omega} - \left(\lambda x + \frac{\gamma^2 x^2}{2} \right) \frac{1}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right]. \end{aligned}$$

Когда экспоненциальный множитель в подинтегральной функции, зависящий от ω , есть просто $e^{i\omega t}$, то интеграл дает решение для малых значений времени t^1 , если применить асимптотическое разложение подинтегральной функции для больших значений ω . В рассматриваемом здесь случае, когда множитель есть $e^{i\omega(t-\alpha x)}$, асимптотическое разложение для больших значений ω дает решение для малых значений $t - \alpha x$, т. е. дает решение вблизи волнового фронта. Следовательно, вблизи волнового фронта имеем

$$f(x, t) = e^{-\beta x} \left[\gamma x + \left(\lambda x + \frac{\gamma^2 x^2}{2} \right) (t - \alpha x) + O(t - \alpha x)^2 \right]. \quad (24)$$

Если податливость $J(i\omega)$ определяется экспериментально, то применимость зависимости (24) ограничивается таким числом членов в асимптотическом разложении $J(i\omega)$, для которых вычисление может быть сделано достаточно точно.

Суммируя, можно показать, что импульс, приложенный к концу полубесконечного вязко-упругого стержня, который имеет мгновенную упругость при растяжении, перемещается вдоль стержня со скоростью $1/\alpha$ и затуханием β , которые определяются выражениями (18) и (19). Затухающий импульс следует непосредственно за волной конечной амплитуды, величина которой на ее переднем фронте равна $I\gamma x e^{-\beta x}$. Форма волны определяется зависимостью (23), в которой интеграл сходится при $\omega \rightarrow \infty$. В общем случае необходима численная оценка интеграла.

Для материала, которому неприсуща мгновенная упругость, имеем

$$\begin{aligned} J(i\omega) &= \frac{p_n(i\omega)^n + p_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + p_0}{q_{n+1}(i\omega)^{n+1} + q_n(i\omega)^n + \dots + q_0} \approx \\ &\approx \frac{p_n}{i\omega q_{n+1}} \left\{ 1 - \frac{i}{\omega} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_n}{q_{n+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega^2} \left[-\frac{p_{n-2}}{p_n} + \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}} - \frac{q_n^2}{q_{n+1}^2} + \frac{p_{n-1}q_n}{p_n q_{n+1}} \right] + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Доказательство этого результата см., например, в [6].

Таким образом,

$$\sqrt{\rho J(i\omega)} \approx \sqrt{\frac{\rho p_n}{i\omega q_{n+1}}} \left[1 - \frac{i}{2\omega} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_n}{q_{n+1}} \right) + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right]$$

и

$$e^{-i\omega x} \sqrt{\rho J(i\omega)} = e^{-x} \sqrt{\frac{\rho p_n i\omega}{q_{n+1}}} \left[1 - \frac{i}{2\omega} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_n}{q_{n+1}} \right) + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right].$$

Сходимость интеграла обеспечивается тем, что значениям напряжения $\sigma(x, t)$ для малых величин t соответствует значение обратного преобразования для больших ω . Следовательно, для малых величин t и $x \neq 0$ найдем

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= -\frac{I}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-x} \sqrt{\frac{\rho p_n i\omega}{q_{n+1}}} \times \right. \\ &\quad \times \left[1 - \frac{x}{2\sqrt{i\omega}} \sqrt{\frac{\rho p_n}{q_{n+1}}} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_n}{q_{n+1}} \right) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \right] d\omega \Big\} = \\ &= -\frac{Ix}{2} \sqrt{\frac{\rho p_n}{q_{n+1}\pi}} e^{-\frac{\rho p_n}{q_{n+1}} \frac{x^2}{4t}} \times \\ &\quad \times \left[t^{-3/2} - \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_n}{q_{n+1}} \right) t^{-1/2} + O(t^{1/2}) \right]. \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{p_n}{q_{n+1}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} i\omega J(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega J_2$$

и

$$\frac{p_n}{q_{n+1}} \left(\frac{p_{n-1}}{p_n} - \frac{q_n}{q_{n+1}} \right) = - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 J_1.$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= -\frac{I \sqrt{\rho} \sqrt{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega J_2} x}{2 \sqrt{\pi}} e^{-\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega J_2 \frac{x^2}{4t}} \times \\ &\quad \times \left[t^{-3/2} + \frac{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 J_1}{\left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega J_2 \right)^2} t^{-1/2} + O(t^{1/2}) \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

Но первый член выражения (25) представляет собой распределение напряжения в вязком материале ($J_1 = 0$, $\omega J_2 = 1/\eta$). Таким образом, для малых величин времени

распределение напряжения в материале, который не обладает мгновенной упругостью при растяжении, такое же самое, как в материале, являющемся при растяжении чисто вязким. Физическое объяснение для этого явления состоит в том, что деформация стремится к нулю, когда $t \rightarrow +0$, и, следовательно, в начальный момент только амортизаторы, а не пружины создают напряжение в фундаментальной сетке.

Аналитические решения этой задачи для элемента Фойгта и двух трехэлементных моделей могут быть получены из статьи Ли и Моррисона [4]. Функцию $\Sigma'(\xi, \tau)$ из этой статьи нужно дифференцировать по τ . Это дифференцирование необходимо потому, что граничные условия, рассматриваемые в этой статье, имеют вид $\sigma(0, t) = H(t)$, тогда как в этом параграфе рассматриваются граничные условия $\sigma(0, t) = \delta(t) = dH(t)/dt$.

Аналитическое решение¹⁾ интеграла (15) найдено для податливости $J(i\omega)$, определяемой выражением (112) главы 2 при $\nu = 2/3$, т. е.

$$J(i\omega) = \frac{1}{K} (i\omega)^{-2/3}.$$

Подставив это значение в интеграл (15), получим

$$\sigma = -\frac{I}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[i\omega t - \rho^{1/2} K^{-1/2} x (i\omega)^{2/3}] d\omega \right\}.$$

Интегрирование дает

$$\sigma = -\frac{I}{t} F_{2/3} \left(\frac{\rho^{1/2} x}{K^{1/2} t^{2/3}} \right), \quad \left. \begin{array}{l} \text{где} \\ F_{2/3}(z) = 2e^{-2z^{3/27}} \left[\frac{z^2}{3^{4/3}} \operatorname{Ai} \left(\frac{z^2}{3^{4/3}} \right) - \frac{z}{3^{2/3}} \operatorname{Ai}' \left(\frac{z^2}{3^{4/3}} \right) \right], \end{array} \right\} \quad (26)$$

где $\operatorname{Ai}(y)$ — функция напряжения Эри, а $\operatorname{Ai}'(y)$ обозначает $d\operatorname{Ai}(y)/dy$.

Другой метод решения этой задачи применили Глоз и Ли [7]. Этот метод пригоден только тогда, когда известна зависимость между напряжением и деформацией

¹⁾ Это решение получил Ватсон (Манчестерский университет).

в дифференциальной форме и эта зависимость включает небольшое число членов. Уравнения задаются на характеристиках и интегрируются численно вдоль характеристик. Для четырехэлементной модели, определяемой (1.10), из уравнения (10) этой главы следует, что характеристиками будут линии $x \pm \sqrt{(q_2/\rho p_2)} t = \text{const}$ и $x = \text{const}$. Детали метода читатель может найти в оригинальной статье.

3. Нормальный удар по границе сферической полости в бесконечной среде

Эта задача является сферически симметричной. Основное дифференциальное уравнение для радиального перемещения упругой среды имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (27)$$

Нормальное радиальное напряжение σ_{rr} , обозначаемое здесь σ , определяется в форме

$$\sigma = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r}. \quad (28)$$

Применяя одностороннее преобразование Фурье к уравнению (27), найдем

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} - \left(\frac{2}{r^2} - \omega^2 a^2 \right) \bar{u} = 0, \quad (29)$$

где

$$a^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}. \quad (30)$$

Решение уравнения (29), которое представляет распространяющуюся наружу волну, имеет вид

$$\bar{u} = A \frac{1 + i\omega r a}{r^2} e^{-i\omega r a},$$

откуда

$$\bar{\sigma} = A \left(\frac{\rho \omega^2}{r} - 4\mu \frac{1 + i\omega r a}{r^3} \right) e^{-i\omega r a}.$$

Рассмотрим случай, когда приложено импульсивное давление $I\delta(t)$ на поверхность полости радиуса R , т. е.

$$\bar{\sigma} = -I \quad \text{при} \quad r = R.$$

Следовательно,

$$\bar{\sigma} = -I \left[\frac{\rho \omega^2}{r} - 4\mu \frac{1 + i\omega r a}{r^3} \right] \left[\frac{\rho \omega^2}{R} - 4\mu \frac{1 + i\omega R a}{R^3} \right]^{-1} e^{-i\omega(r-R)a}$$

и

$$\sigma = -\frac{1}{\pi} I \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty e^{i\omega t} \left[\frac{\rho (i\omega)^2}{r} + 4\mu \frac{1 + i\omega r a}{r^3} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\rho (i\omega)^2}{R} + 4\mu \frac{1 + i\omega R a}{R^3} \right]^{-1} e^{-i\omega(r-R)a} d\omega \right\}. \quad (31)$$

Решение для вязко-упругого материала получается заменой $\lambda + 2\mu$ и 2μ соответствующими комплексными модулями. Из табл. 3.1 видно, что $\lambda + 2\mu$ заменяется на $\frac{1}{3}(Y_v + 2Y_s)$, а 2μ на Y_s . Если $J^*(i\omega)$ обозначает комплексную податливость $3(Y_v + 2Y_s)^{-1}$, то из формулы (30) найдем $a = \sqrt{\rho J^*(i\omega)}$, а интеграл (31) видоизменяется и дает напряжение в вязко-упругой среде в форме

$$\sigma = -I \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty e^{i\omega t} \left[\frac{\rho (i\omega)^2}{r} + 2Y_s \frac{1 + i\omega r \sqrt{\rho J^*(i\omega)}}{r^3} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\rho (i\omega)^2}{R} + 2Y_s \frac{1 + i\omega R \sqrt{\rho J^*(i\omega)}}{R^3} \right]^{-1} e^{-i\omega \sqrt{\rho J^*(i\omega)}(r-R)} d\omega \right\}. \quad (32)$$

Если сравнить (32) с выражением (15), которое определяет напряжение, возникающее при ударе по концу вязко-упругого стержня, то видно, что при замене $r - R$ на x , а $J^*(i\omega)$ на $J(i\omega)$ выражения отличаются только тем, что в (32) входят два дополнительных члена в скобках.

Комплексную податливость можно выразить в виде $J^*(i\omega) = P^*(i\omega)/Q^*(i\omega)$. Если степени многочленов P^* и Q^* одинаковые и коэффициенты при членах высших степеней равны соответственно p_n^* и q_n^* , то линии

$$r - R \pm \sqrt{\frac{q_n^*}{\rho p_n^*}} t = \text{const}$$

являются характеристиками уравнения для вязко-упругого материала, аналогично уравнению (27). Фронт любого возмущения перемещается со скоростью $\sqrt{q_r^*/\rho p_r^*}$.

Асимптотическое разложение при $i\omega \rightarrow \infty$ имеет вид ¹⁾

$$\left[\frac{\rho (i\omega)^2}{r} + 2Y_s \frac{1 + i\omega r \sqrt{\rho J^*(i\omega)}}{r^3} \right] \times \\ \times \left[\frac{\rho (i\omega)^2}{R} + 2Y_s \frac{1 + i\omega R \sqrt{\rho J^*(i\omega)}}{R^3} \right]^{-1} \approx \\ \approx \frac{R}{r} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\rho}} \sqrt{\lim_{\omega \rightarrow \infty} J^*} \lim_{\omega \rightarrow \infty} Y_s \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{i\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right].$$

Таким образом, применяя асимптотическое разложение для выражения $\exp[-i\omega \sqrt{\rho J(i\omega)} x]$, полученное в предыдущем параграфе, асимптотическое разложение для подынтегральной функции в выражении (32) получим в виде

$$\frac{R}{r} e^{i\omega [t - \alpha^*(r-R)]} e^{-\beta^*(r-R)} \left\{ 1 + \frac{1}{i\omega} \left[\gamma^*(r-R) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\alpha^*}{\rho} \lim_{\omega \rightarrow \infty} Y_s \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right] + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \right\}, \quad (33)$$

где аналогично формуле (20) имеем

$$\alpha^* = \sqrt{\rho \frac{p_n^*}{q_n^*}} = \sqrt{\rho \lim_{\omega \rightarrow \infty} J_1^*}, \quad (34)$$

$$\beta^* = \frac{\rho}{2\alpha^*} \lim_{\omega \rightarrow \infty} J_2^* \quad (35)$$

и

$$\gamma^* = \frac{\rho}{2\alpha^*} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \left(J_1^* - \frac{p_n^*}{q_n^*} \right) + \frac{\beta^{*2}}{2\alpha^*}. \quad (36)$$

Из (33) по аналогии с выводом предыдущего параграфа следует, что нормальный импульс, приложенный к сферической полости в вязко-упругом материале, который имеет мгновенную упругость, распространяется радиально наружу со скоростью $1/\alpha^*$ и амплитудой, про-

¹⁾ Можно показать, что так как $J^*(i\omega)$ стремится к постоянной при $\omega \rightarrow \infty$, то и $Y_s(i\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине.

порциональной $(1/r) \exp[-\beta^*(r-R)]$. Затухающий импульс следует непосредственно за волной конечной амплитуды, которая имеет на переднем фронте волны величину, равную

$$\left(\gamma^* - \frac{2\alpha^*}{\rho r R} \lim_{\omega \rightarrow \infty} Y_s \right) (r-R) e^{-\beta^*(r-R)}.$$

Для полости в материале, для которого $J^*(i\omega) = O(1/\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ ¹⁾, результаты могут быть получены по аналогии со стержнем, для которого $J(i\omega) = O(1/\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. Решение для малых времен имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma(r-R, t) = \\ = - \frac{I \sqrt{\rho \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega J_2^*}}{2\sqrt{\pi}} \frac{(r-R) R}{r t^{3/2}} e^{-\rho \left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega J_2^* \right) \frac{(r-R)^2}{4t}}. \end{aligned} \quad (37)$$

4. Нормальный удар по заземленной круглой пластине

В последних двух параграфах с помощью асимптотических разложений при $\omega \rightarrow \infty$ были получены решения в явной форме для малых значений времени. В этом параграфе определяется окончательная форма пластин, т. е. рассматриваются большие значения времени и, следовательно, необходимы разложения преобразований для малых значений ω .

Уравнение для поперечного перемещения w упругой пластины, толщина которой h , в случае радиальной симметрии имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w + \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{D} Z(r, t), \quad (38)$$

где $Z(r, t)$ — поперечная нагрузка на единицу площади,

$$D = \frac{2EL^3}{3(1-\nu^2)}, \quad (39)$$

¹⁾ Для комплексной податливости $J^*(i\omega) = O(1/\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$; одна или обе податливости $J_v(i\omega)$ и $J_s(i\omega)$ равны $O(1/\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$.

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, и

$$\kappa^2 = \frac{2\rho h}{D}. \quad (40)$$

Если пластина радиуса a подвержена параболической импульсивной нагрузке, то

$$Z(r, t) = k(a^2 - r^2)\delta(t), \quad (41)$$

где k — постоянная, а граничные условия имеют вид

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (42)$$

Применяя одностороннее преобразование Фурье к уравнению (38), нагрузке (41) и граничным условиям (42), получаем

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 \bar{w} - \omega^2 \kappa \bar{w} = \lambda(a^2 - r^2), \quad (43)$$

где

$$\lambda = \frac{k}{D} \quad (44)$$

и

$$\bar{w} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{w}}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (45)$$

Наиболее общее решение уравнения (43), конечное при $r = 0$, имеет вид¹⁾

$$\bar{w} = A J_0(\sqrt{\kappa\omega} r) + B I_0(\sqrt{\kappa\omega} r) - \frac{\lambda}{\kappa^2 \omega^2} (a^2 - r^2). \quad (46)$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из условий (45). Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{2a\lambda}{(\kappa\omega)^{5/2}} & \frac{I_0(\sqrt{\kappa\omega} a) J_0(\sqrt{\kappa\omega} r) - J_0(\sqrt{\kappa\omega} a) I_0(\sqrt{\kappa\omega} r)}{J_1(\sqrt{\kappa\omega} a) I_0(\sqrt{\kappa\omega} a) + J_0(\sqrt{\kappa\omega} a) I_1(\sqrt{\kappa\omega} a)} - \\ & - \frac{\lambda}{\kappa^2 \omega^2} (a^2 - r^2). \end{aligned} \quad (47)$$

Поперечное перемещение w находится обращением преобразования (47).

Упругая пластина будет колебаться бесконечно, и, следовательно, обратное преобразование приближения, соот-

¹⁾ Здесь J_0 , J_1 , I_0 и I_1 — функции Бесселя.

ветствующего малым значениям ω , не будет сходиться при $t \rightarrow \infty$. Однако выражение (47) может быть все же использовано для вязко-упругой пластины при условии, что упругие постоянные заменяются соответствующими вязко-упругими модулями. Так как вязко-упругая пластина рассеивает энергию и так как суммарная энергия системы конечна и равна кинетической энергии импульса, то приближенное решение, соответствующее малым значениям ω , даваемое обратным преобразованием, будет в случае вязко-упругой пластины сходиться при $t \rightarrow \infty$ ¹⁾.

Необходимый для этого комплексный модуль соответствует $E/(1 - \nu^2)$. Он будет обозначаться $Y(i\omega)$. Из табл. 3.1 имеем

$$Y(i\omega) = \frac{Y_s(2Y_v + Y_s)}{Y_v + 2Y_s}. \quad (48)$$

Разложение для малых значений ω будет зависеть от того, испытывает ли материал установившееся вязкое течение или нет. Если вязкое течение имеет место, то

$$\begin{aligned} Y(i\omega) &= \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} = \frac{q_1(i\omega) + q_2(i\omega)^2 + \dots}{p_0 + p_1(i\omega) + p_2(i\omega)^2 + \dots} = \\ &= \frac{q_1}{p_0}(i\omega) \left[1 + \left(\frac{q_2}{q_1} - \frac{p_1}{p_0} \right) i\omega + O(\omega^2) \right], \end{aligned} \quad (49)$$

если вязкое течение отсутствует, то

$$\begin{aligned} Y(i\omega) &= \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} = \frac{q_0 + q_1(i\omega) + q_2(i\omega)^2 + \dots}{p_0 + p_1(i\omega) + p_2(i\omega)^2 + \dots} = \\ &= \frac{q_0}{p_0} \left[1 + \left(\frac{q_1}{q_0} - \frac{p_1}{p_0} \right) i\omega + O(\omega^2) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Для малых значений $\sqrt{\kappa\omega}a$ разложение функции Бесселя в (47) дает

$$\overline{\omega} = \frac{(a^2 - r^2)^2 (7a^2 - r^2) \lambda}{2^6 \cdot 3^2} [1 + O(\kappa^2 a^4 \omega^2)]. \quad (51)$$

Из формул (44) и (39) имеем

$$\lambda = \frac{3k}{2h^3} [Y(i\omega)]^{-1}.$$

¹⁾ На основании этого физического довода можно показать, что все полюсы в правой части уравнения (47) имеют для вязко-упругого материала положительные мнимые части.

С помощью (49) и (50) получаем

$$\lambda = \begin{cases} \frac{3k}{2h^3} \frac{p_0}{q_1 i \omega} \left[1 - \left(\frac{q_2}{q_1} - \frac{p_1}{p_0} \right) i \omega + O(\omega^2) \right], & q_0 = 0 \\ \frac{3k}{2h^3} \frac{p_0}{q_0} \left[1 - \left(\frac{q_1}{q_0} - \frac{p_1}{p_0} \right) i \omega + O(\omega^2) \right], & q_0 \neq 0. \end{cases} \quad (52)$$

Из формул (40) и (44) имеем $\kappa^2 = \frac{2\rho h}{k} \lambda$. Таким образом, $\kappa \omega$ равно $O(\omega^{1/2})$ или $O(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$, и разложение, использованное при выводе выражения (51), справедливо для малых значений ω . Подставляя значения λ и κ^2 в (51) и принимая во внимание, что $\lim_{\omega \rightarrow 0} i \omega \bar{x}(i \omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ ¹⁾, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w = \frac{(a^2 - r^2)^2 (7a^2 - r^2)}{384} \frac{k p_0}{q_1 h^3}, \quad \text{если } q_0 = 0, \quad (53)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w = 0, \quad \text{если } q_0 \neq 0.$$

В результате найдем, что окончательная форма пластины зависит только от того, имеет ли материал установившееся вязкое течение или нет. Если установившееся вязкое течение имеется, то окончательная форма пластины определяется выражением (53). Если установившегося вязкого течения нет, то пластина возвращается к своей первоначальной форме после того, как кинетическая энергия импульса рассеется. Постоянная в формуле (53), зависящая от свойств материала, равна p_0/q_1 . Из выражений (2.87) и (2.62) можно видеть, что $p_0/q_1 = 1/\eta$. Таким образом, окончательное значение перемещения пластины пропорционально величине импульса, обратно пропорционально коэффициенту вязкости при установившемся течении и обратно пропорционально кубу толщины пластины.

Читатель заметит, что при выводе уравнения для окончательной формы пластины можно было бы использовать преобразование Лапласа. Преобразование Фурье применяется в этой задаче потому, что, когда желательно вычислить перемещение для не очень больших значений времени t , необходимо вычислить численно первую часть выражения (47), используя измеренные значения комплексных модулей. Для очень малых значений времени t

¹⁾ Доказательство этого результата см., например, в [6].

пригодно приближение, использованное в выражении (47), которое соответствует большим значениям ω . Это приближение содержит значения комплексных модулей при высоких частотах. Функция ползучести, преобразование Лапласа которой вводится применением преобразования Лапласа в этой задаче, не может быть измерена для временных интервалов, меньших одной секунды. Однако это возражение не использовано ни в этой главе, ни в предыдущих главах, если только зависимость между напряжением и деформацией не дана явно в дифференциальной форме. Таким образом, не имеет существенного значения, используется ли одностороннее преобразование Лапласа или одностороннее преобразование Фурье.

Замечание

Кольский [8] выполнил эксперимент, при котором заряд был взорван на одном конце вязко-упругого стержня. Результирующий импульс перемещался вперед и назад вдоль стержня, последовательно отражаясь от обоих концов стержня. Перемещение противоположного конца стержня измерялось и выводилась форма импульса перед и после двух прохождений стержня. Кольский вычислял изменение формы импульса по измеренным значениям комплексного модуля с помощью интеграла Фурье. Экспериментальные и теоретические значения оказались в хорошем согласии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolsky H., Stress waves in solids (p. 60, Figure 14, Clarendon Press, Oxford, 1953). Русский перевод: Кольский Г., Волны напряжения в твердых телах, ИЛ, М., 1955.
2. Lee E. H., Kanter I., Wave propagation in finite rods of viscoelastic material, *J. Appl. Phys.*, **24**, № 9, 1115—1122 (1953). Русский перевод: Ли, Кантер, сб. *Механика*, № 4(32), 1955.
3. Morrison J. A., Wave propagation in rods of Voigt material and viscoelastic materials with three parameter models, *Quart. Appl. Math.*, **14**, № 2, 153—169 (1956).
4. Lee E. H., Morrison J. A., A comparison of propagation of longitudinal waves in rods of viscoelastic materials, *J. Polymer Sci.*, **19**, № 91, 93—110 (1956).

5. Whittaker E. T., Watson G. N., Modern Analysis, 1927, 4th ed. Cambridge University Press. Русский перевод: Уиттекер Э., Ватсон Дж., Курс современного анализа, М., 1962.
6. Carslaw H. S., Jaeger J. C., Operational methods in applied mathematics, Second Edition (p. 225, Oxford University Press). Русский перевод: Карслоу Х., Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948.
7. Glauz R. D., Lee E. H., Transient Wave Analysis in Linear Time-Dependent Material, *J. Appl. Phys.*, **25**, № 8, 947—853 (1954). Русский перевод: Глоз, Ли, сб. *Механика*, № 4(32), 1955.
8. Kolsky H., Propagation of stress Pulses in Viscoelastic Solids., *Phil. Mag. H*, **1**, № 8, 693—709 (1956).

МОДЕЛЬ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ИЗМЕРЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ КОМПЛЕКСНОГО МОДУЛЯ ИЛИ КОМПЛЕКСНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ

1. Содержание метода

Задачи анализа напряженного состояния, приведенные в гл. 3, 4 и 5, показывают, что в общем случае решения, не требующие окончательного численного определения обратного преобразования, могут получаться для всех значений времени только для простейших вязко-упругих материалов. Дифференциальная форма зависимости между напряжением и деформацией для реальных материалов, за исключением упругих тел и вязких жидкостей, редко включает только небольшое число членов. Следовательно, для реальных материалов точное решение потребует заключительного численного интегрирования для каждого ряда значений пространственных и временной координат. Если в частной задаче для данного вязко-упругого материала приложенное напряжение или перемещение разложено в ряд Фурье по времени и сумма ряда вне интервала $a \leq \omega \leq b$ пренебрежимо мала, то результаты исследования напряженного состояния для этой задачи будут приближенно соответствовать результатам анализа подобной задачи для любого другого вязко-упругого материала, который имеет почти равный комплексный модуль в интервале (a, b) .

Тот факт, что комплексные модули могут значительно различаться вне этого интервала, не имеет значения, так как соответствующие вклады обратных преобразований одновременно пренебрежимо малы. Предполагается, что поведение модулей достаточно хорошее вне заданного интервала, т. е. не имеется резких подъёмов или спусков любого существенно важного модуля. Даже в том случае, когда модули умножаются на малое преобразование приложенного напряжения или перемещения, влияние на обратное преобразование может быть все же заметным. В § 7

гл. 2 было показано, что модули не имеют полюсов или нулей на действительной оси ω .

Выбор комплексных модулей, приближенно соответствующих реальному материалу, зависит от частичного вида рассматриваемой граничной задачи. Вообще наилучший выбор из всех возможных выборов это тот, который дает возможность найти точное решение задачи, наилучшим образом соответствующее модулям реального материала в интервале (a, b) . Наилучшей будет простая модель, состоящая самое большее из четырех элементов. Весьма возможно, однако, что в некоторых случаях [в тех, например, в которых комплексные модули определяются формулой (2.111)] выбор комплексных модулей дает возможность найти точное решение, и константы K и ν , входящие в это выражение, могут дать достаточно хорошее приближение в интервале (a, b) . Дать общий способ выбора модели, пригодный во всех случаях, невозможно. Можно только указать основные правила для выбора модели.

Кольский и Ши [1] дали пример выбора комплексных модулей в данном частотном интервале (a, b) . Вольтерра [2] и Кольский [3] провели измерения на подобных образцах полиэтилена, но в разных частотных интервалах: Вольтерра в интервале порядка 10^2 сек^{-1} , а Кольский в интервале порядка $3 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$. Оба нашли, что трехэлементные упругие модели соответствуют их результатам. В обозначениях (1.8) Вольтерра нашел, что η'_2/E'_2 равно $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$, а Кольский получил, что η'_2/E'_2 равно $2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$. Эти результаты подчеркивают важность соответствующих моделей для частотного интервала, определяемого разложением в ряд Фурье по времени внешних приложенных сил и перемещений.

Действительные и мнимые части комплексных модулей и податливостей восьми простейших вязко-упругих материалов даны в табл. 6.1. Из этой таблицы можно получить правила для выбора моделей, соответствующих экспериментально определенным в данном частотном интервале комплексным модулям и податливостям. Реальный материал очень редко в точности удовлетворяет правилу. Степень точности, с которой модель представляет свойства

Комплексные модули и податливости



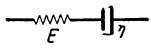
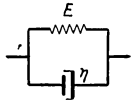
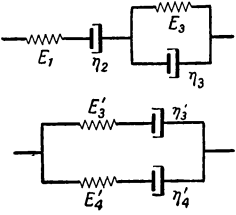
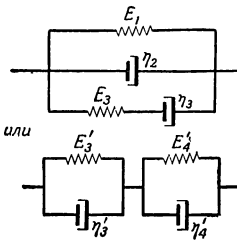
Название	Модель	$Y(i\omega) = Y_1 + iY_2$	
		Y_1	Y_2/ω
		E	0
		Y_1	Y_2/ω
		0	η
		Y_1	Y_2/ω
		$\frac{\omega^2 \eta^2 E}{E^2 + \omega^2 \eta^2}$	$\frac{\eta E^2}{E^2 + \omega^2 \eta^2}$
		Y_1	Y_2/ω
		E	η
Четырех- элемент- ная 1-го типа		Y_1	Y_2/ω
		$E'_3 + E'_4 - \frac{E_3'^3}{E_3'^2 + \omega^2 \eta_3'^2} - \frac{E_4'^3}{E_4'^2 + \omega^2 \eta_4'^2}$	$\frac{\eta_3' E_3'^2}{E_3'^2 + \omega^2 \eta_3'^2} + \frac{\eta_4' E_4'^2}{E_4'^2 + \omega^2 \eta_4'^2}$

Таблица 6.1

для восьми простейших моделей

J_1	$J(i\omega) = J_1 - iJ_2$ ωJ_2	Соответствующие уравнения
$\frac{1}{E}$	0	—
0	$\frac{1}{\eta}$	—
$\frac{1}{E}$	$\frac{1}{\eta}$	—
$\frac{E}{E^2 + \omega^2 \eta^2}$	$\frac{\omega^2 \eta}{E^2 + \omega^2 \eta^2}$	—
$\frac{1}{E_1} + \frac{E_3}{E_3^2 + \omega^2 \eta_3^2}$	$\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} - \frac{E_3^2 / \eta_3}{E_3^2 + \omega^2 \eta_3^2}$	$\frac{E_3}{\eta_3} + \omega J_2 = \frac{E_3}{E_1 \eta_3} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} \quad (1)$
—	—	—

Название	Модель	$Y(i\omega) = Y_1 + iY_2$	
		Y_1	Y_2/ω
Четырех- элемент- ная 2-го типа	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;"> σ или ε </div>  </div>	$E_1 + E_3 - \frac{E_3^3}{E_3^2 + \omega^2 \eta_3^2}$	$\eta_2 + \frac{\eta_3 E_3^2}{E_3^2 + \omega^2 \eta_3^2}$
		—	—
Трехэле- ментная упругая	соответствует (а) $\eta_2 \rightarrow \infty$, (б) $\eta_4' \rightarrow \infty$, (в) при $\eta_2 \rightarrow 0$,		
Трехэле- ментная вязкая	соответствует (а) $E_1 \rightarrow \infty$, (б) $E_4' \rightarrow \infty$, (в) при $E_1 \rightarrow 0$,		

материала, в любом интервале зависит от точности выбора модели. Правила 5—7 применяются только в том случае, когда правила 1—4 не пригодны. Правило 8 используется только в том случае, когда все предыдущие правила не подходят. Ниже даны правила для выбора соответствующих моделей.

1. Если в интервале (a, b) Y_1 и J_1 (или только J_1) постоянны, а Y_2 и J_2 (или только J_2) равны нулю, то материал ведет себя в интервале (a, b) как упругое тело.

Продолжение табл. 6.1

$J(i\omega) = J_1 - iJ_2$		Соответствующие уравнения
J_1	ωJ_2	
—	—	$Y_1 + \frac{E_3}{\eta_3} \frac{Y_2}{\omega} =$ $= E_1 + E_3 + \frac{E_3 \eta_2}{\eta_3} \quad (2)$
$\frac{E'_3}{E_3'^2 + \omega^2 \eta_3'^2} +$ $+ \frac{E'_4}{E_4'^2 + \omega^2 \eta_4'^2}$	$\frac{1}{\eta_3'} + \frac{1}{\eta_4'} -$ $- \frac{E_3'^2 / \eta_3'}{E_3'^2 + \omega^2 \eta_3'^2} -$ $- \frac{E_4'^2 / \eta_4'}{E_4'^2 + \omega^2 \eta_4'^2}$	—

при (2) $\eta_4' \rightarrow 0$.при (2) $E_4' \rightarrow 0$.

2. Если в интервале (a, b) Y_1 и J_1 (или только J_1) равны нулю, а Y_2/ω и ωJ_2 (или только ωJ_2) постоянны, то материал ведет себя в интервале (a, b) как вязкая жидкость.

3. Если в интервале (a, b) J_1 и ωJ_2 постоянны, но не равны нулю, то материал в интервале (a, b) ведет себя как материал Максвелла.

4. Если в интервале (a, b) Y_1 и Y_2/ω постоянны, но не равны нулю, то материал интервала (a, b) ведет себя как материал Фойгта.

5. Если в интервале (a, b) существует линейная зависимость между J_1 и ωJ_2 , но не между Y_1 и Y_2/ω , то материал в интервале (a, b) ведет себя как четырехэлементная модель первого типа.

6. Если в интервале (a, b) существует линейная зависимость между Y_1 и Y_2/ω , но не между J_1 и ωJ_2 , то материал в интервале (a, b) ведет себя как четырехэлементная модель второго типа.

7. Если в интервале (a, b) одновременно существуют линейные зависимости между J_1 и ωJ_2 и между Y_1 и Y_2/ω , то материал в интервале (a, b) ведет себя как трехэлементная упругая модель или как трехэлементная вязкая модель.

8. Если в интервале (a, b) величина Y_2/Y_1 постоянна и равна $\operatorname{tg} \nu\pi/2$ и если $\log Y_1$ равен $\nu \log \omega$ плюс другая постоянная C , то материал ведет себя в интервале (a, b) как материал, для которого зависимость между напряжением и деформацией определяется в интервале (a, b) зависимостью (2.107).

Определение численных величин упругой и вязкой постоянных и, следовательно, коэффициентов в дифференциальном законе, определяющем зависимость между напряжением и деформацией, в случае, когда любое из правил 1—4 удовлетворяется, нуждается в дальнейшем обсуждении. Когда правило 5 или правило 7 выполняется, зависимость 1 в табл. 6.1 определяет E_3/η_3 и

$$\frac{E_3}{E_1\eta_3} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3}. \quad (1)$$

Так как в этом случае имеем

$$J_1 = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} \left[1 + \left(\frac{\eta_3}{E_3} \omega \right)^2 \right]^{-1}, \quad (2)$$

то график зависимости J_1 от $\{1 + [(\eta_3/E_3)\omega]^2\}^{-1}$ определяет $1/E_1$ и $1/E_3$. Таким образом, находятся E_1 , η_2 , E_3 и η_3 . Когда выполняется правило 7, то или $1/E_1 = 0$ (трехэлементная вязкая модель) или $1/\eta_2 = 0$ (трехэлементная упругая модель). Подобным же образом, когда удовлетворяется правило 6 или правило 7, зависимость (6.2)

определяет E_3/η_3 и $E_1 + E_3 + E_3\eta_2/\eta_3$, и так как при этом найдем

$$Y_1 = E_1 + E_3 - E_3 \left[1 + \left(\frac{\eta_3}{E_3} \omega \right)^2 \right]^{-1}, \quad (3)$$

то график зависимости Y_1 от $\{1 + [(\eta_3/E_3)\omega]^2\}^{-1}$ определяет $E_1 + E_3$ и E_3 . Когда выполняется правило 8, из выражения 2.111, которое может быть написано в форме

$$\log Y_1 = \log \left(K \cos \frac{\nu\pi}{2} \right) + \nu \log \omega, \quad (4)$$

следует, что $K = \sec(\nu\pi/2) \cdot 10^C$.

2. Первый пример

Бленд и Ли [4] сделали попытку подобрать четырех-элементную модель первого типа, соответствующую измерениям податливости сдвига для полиизобутилена при температуре 25°C в интервале частот от 30 до 4000 герц, которые были выполнены Фитцджеральдом и др. [5]. График зависимости J_1 от fJ_2 ($\omega = 2\pi f$) показан на рис. 18.

Кривая недостаточно близка к прямой, чтобы можно было выбрать одну модель на всем интервале. Однако если ограничиться соответствием модели только в интервале одного десятичного порядка, тогда четырехэлементная модель первого типа дает удовлетворительное представление свойств материала. Прямые, соответствующие линейной зависимости между J_1 и ωJ_2 для двух таких моделей, построены на рис. 18. По этим прямым находятся два

Таблица 6.2

Значения E_1 , E_3 , η_2 и η_3 для полиизобутилена при 25°C в единицах С. Г. С.

Частотный интервал, герц	E_1	E_3	η_2	η_3
30—300	$2,8 \cdot 10^7$	$6,1 \cdot 10^6$	$7,6 \cdot 10^4$	$8,7 \cdot 10^3$
600—4000	$2,6 \cdot 10^8$	$2,4 \cdot 10^7$	$1,1 \cdot 10^4$	$3,0 \cdot 10^3$

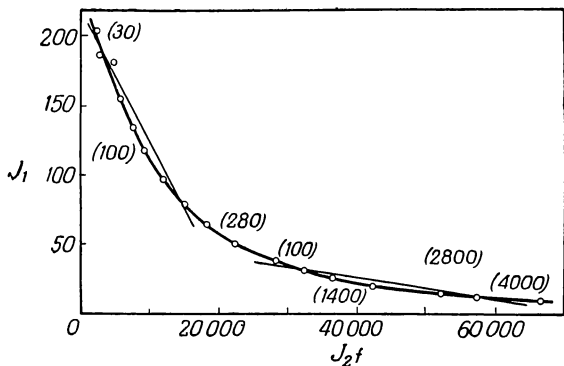


Рис. 18. График зависимости J_1 от $J_2 f$ для полиизобутилена при сдвиге

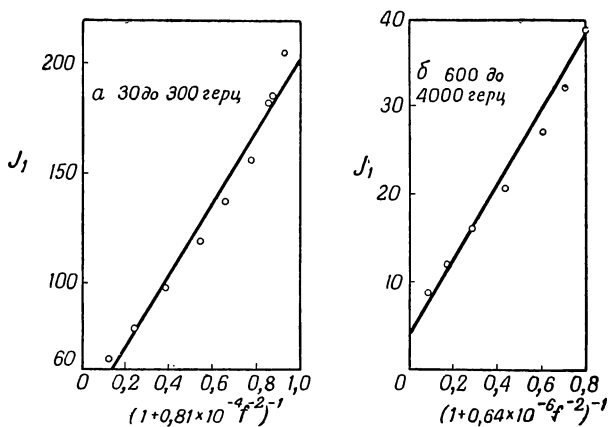


Рис. 19. График зависимости J_1 от $\left[1 + \left(\frac{\eta_3}{E_3}\right)^2 \omega^2\right]^{-1}$ для полиизобутилена

ряда значений E_3/η_3 и $(E_3/E_1\eta_3) + 1/\eta_2 + 1/\eta_3$. Зависимость между J_1 и соответствующими значениями

$$\left[1 + \left(\frac{\eta_3}{E_3} \omega\right)^2\right]^{-1}$$

построена на рис. 19. По этим прямым определяются значения постоянных. В табл. 6.2 даны значения постоянных.

Наконец, с помощью модели вычислялись значения J_1 и J_2 для интервала высоких частот. Вычисленные значения

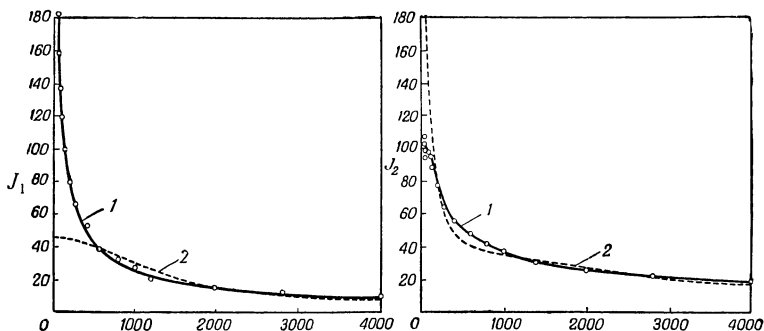


Рис. 20. Сравнение зависимостей J_1 и J_2 от частоты для полиизобутилена, полученных экспериментально и соответствующих четырехэлементной модели первого типа

1 — эксперимент, 2 — расчеты для модели

построены на рис. 20, там же представлены экспериментальные значения.

3. Второй пример

Проведенные Летерзичем [6] измерения величин Y_1 и $\operatorname{tg} \delta$ ($\delta = Y_2/Y_1$) для эбонита при сдвиге даны в табл. 6.3.

Так как $\operatorname{tg} \delta$ мало изменяется при изменении частоты на семь десятичных порядков, то по правилу 8 пытаемся подобрать комплексный модуль в виде

$$Y(i\omega) = K(i\omega)^v, \quad K > 0, \quad 0 < v < 1. \quad (5)$$

Так как $\delta \ll 1$, то $Y_1 \gg Y_2$ и можно ожидать, что относительная ошибка измерения Y_1 будет меньше относительной ошибки измерения Y_2 . Поэтому на рис. 21 построен график $\lg Y_1$ в зависимости от $\lg f$ ($\omega = 2\pi f$).

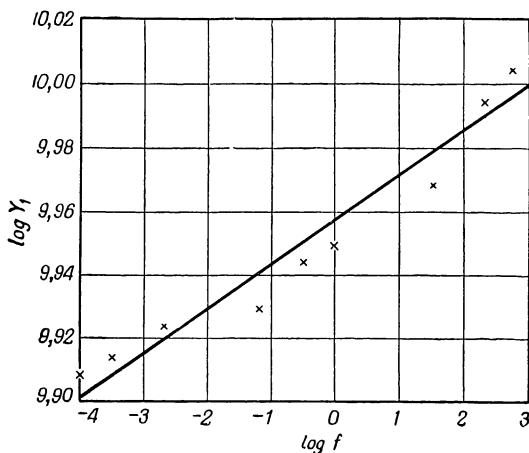


Рис. 21. График зависимости $\lg Y_1$ от $\lg f$ для эбонита при сдвиге; знак \times означает экспериментальные значения

Таблица 6.3

Измеренные значения Y_1 и $\operatorname{tg} \delta$ для эбонита

Логарифм частоты, герц	$Y_1 \cdot 10^{-9}$, дин/см ²	$\operatorname{tg} \delta \cdot 10^2$	$\lg Y_1$
2,788	10,1	3,1	10,004
2,334	9,9	1,6	9,996
1,544	9,3	2,3	9,968
0,000	8,9	1,3	9,949
1,518	8,8	1,3	9,944
2,826	8,5	1,2	0,929
3,342	8,4	1,0	9,924
4,518	8,2	1,7	9,914
4,000	8,1	2,0	9,908

Оказалось, что кривая близка к прямой и что ее наклон соответствует измеренному значению $\operatorname{tg} \delta$. Из формулы (5) имеем

$$Y_1 = K \omega^v \cos \frac{v\pi}{2}$$

и

$$\lg Y_1 = v \lg \omega + \lg \left(K \cos \frac{v\pi}{2} \right).$$

Так как $\delta \ll 1$, а $v = (2/\pi) \delta$, то $v \ll 1$ и

$$\lg Y_1 \approx v \lg \omega + \lg K \approx v \lg f + v \lg 2\pi + \lg K. \quad (6)$$

Из рис. 21 получим $v = 0,014$ и $\lg K = 9,957 - 0,011 = 9,946$; $K = 8,83 \cdot 10^3$ дин/см. Соответствующий комплексный модуль равен

$$Y(i\omega) = 8,83 \cdot 10^9 (i\omega)^{0,014} \text{ дин/см.} \quad (7)$$

Значение $\operatorname{tg} \delta$ равно 0,021, что попадает в интервал измеренных значений, данных в табл. 6.3.

Летерзич измерил также деформацию сдвига при испытании эбонита на ползучесть при постоянном напряжении, равном $7,74 \cdot 10^7$ дин/см. Если выражение (7) точно описывает свойства материала в частотном интервале, то деформация при ползучести описывается формулой (2.105)

$$\varepsilon(t) = \frac{7,74 \cdot 10^7}{8,83 \cdot 10^9 \cdot \Gamma(1,014)} t^{0,014} H(t).$$

Теперь

$$t^{0,014} = e^{0,014 \ln t} = e^{0,032 \lg t} = 1 + 0,032 \lg t + O(v \ln t)^2.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(t) = 0,00884 + 0,00028 \lg t + O(v \ln t)^2.$$

Летерзич нашел, что $\varepsilon(t)$ в интервале $-3 \leq \lg t < 3$ существенно линейна по отношению к $\lg t$ (см. рис. 3 его статьи). Прямая, построенная на этом графике, имеет уравнение

$$\varepsilon(t) = 0,00882 + 0,00021 \lg t.$$

Таким образом, выражение (7) точно представляет величину деформации сдвига при $t=1$, но дает ошибку порядка одной трети для градиента деформации в зависимости от $\lg t$. Так как градиент мал, то величина $\varepsilon(t)$ определяется с ошибкой $+3\%$ в интервале $-3 \leq \lg t \leq 3$.

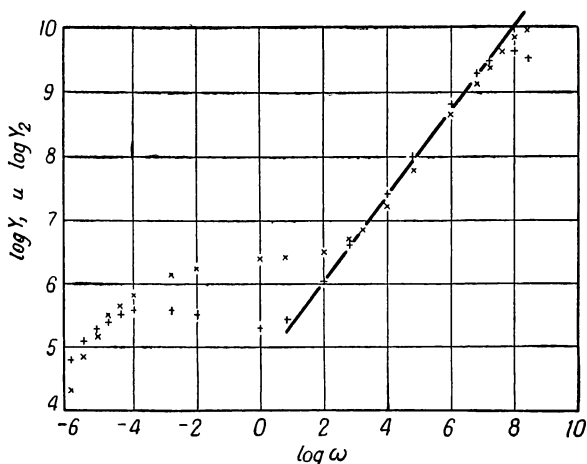


Рис. 22. График зависимости измеренных значений $\lg Y_1$ и $\lg Y_2$ от $\lg \omega$ для полиизобутилена при сдвиге. Прямая линия соответствует интервалу $3 \leq \lg \omega \leq 7$; знак \times относится к $\lg Y_1$; знак $+$ соответствует $\lg Y_2$

Комплексный модуль подбирался для периодов P в интервале $-3 \leq \lg P \leq 4$ с точностью для $\lg Y_1$ порядка $\pm 0,01$, т. е. с возможной относительной ошибкой для антилогарифма 0,01 — 1, или 2,3%. Этот пример показывает, что в тех случаях, когда комплексный модуль подбирается для интервала характеристических времен, требуемых для его приложения, то ошибка, вызванная применением подобранного комплексного модуля, будет того же порядка, как и ошибка при подборе комплексного модуля.

Значения Y_1 и Y , которые получил Марвин [7] для полиизобутилена при сдвиге, могут служить иллюстрацией необходимости выполнения обоих условий в правиле 8

для того, чтобы можно было предположить, что комплексный модуль можно подобрать по уравнению вида $Y(i\omega) = K(i\omega)^\nu$. На рис. 22 построена зависимость $\lg Y_1$ и $\lg Y_2$ от $\lg \omega$. Мы пытались подобрать данное уравнение для этих значений на интервале в четыре десятичных порядка $3 \leq \lg \omega < 7$. В этом интервале величина Y_1 приблизительно равна Y_2 , следовательно, $\lg \delta$ приблизительно равен единице, а $\delta \approx \pi/4$ и $\nu = 2\delta/\pi \approx 1/2$. Если уравнение для $Y_s(i\omega)$ имеет желаемую форму, то наклон „наилучшей“ прямой, служащей графиком зависимости $\lg Y_1$ от $\lg \omega$ равен ν , т. е. приблизительно 0,5. Но измеренное значение наклона прямой линии, построенной на рис. 22, равно приблизительно 0,7 и, следовательно, уравнение вида $Y_s(i\omega) = K(i\omega)^\nu$ не может быть использовано на интервале в четыре десятичных порядка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kolsky H., Shi Y. Y., Brown University Technical Report, № 5, 1958.
2. Volterra E., On elastic continua with hereditary characteristics, *J. Appl. Mech.*, 18, № 3, 273—279 (1951).
3. Kolsky H., Investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading, *Proc. Phys. Soc. Lond.*, 62, № 359B, 676—700 (1949).
4. Bland D. R., Lee E. H., On determination of viscoelastic model for stress analysis of plastics, *J. Appl. Mech.*, 23, № 3, 416—420 (1956).
5. Fitzgerald E. R., Grandine L. D., Ferry J. D., Dynamical mechanical properties of polyisobutylene, *J. Appl. Phys.*, 24, № 7, 911—916 (1953).
6. Lethersich W., Rheological properties of dielectric polymers, *Brit. J. Appl. Phys.*, 1, № 11, 294—301 (1950).
7. Marvin R. S., Dynamic mechanical properties of polyisobutylene, 156—163. Proceedings of Second International Congress on Rheology—Oxford, July 26—31, 1953, Academic Press Inc., New York, 1954.

НАПРЯЖЕНИЯ В ВЯЗКО-УПРУГОМ ТЕЛЕ ¹⁾

Е. Л И

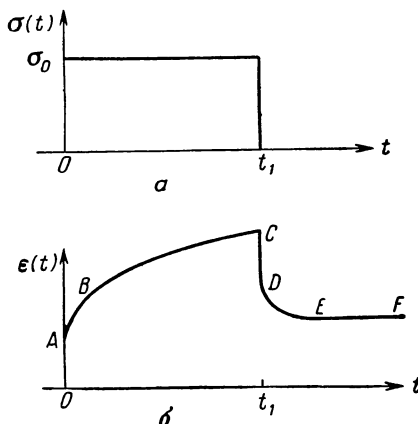
В настоящей статье отмечается необходимость применения анализа напряжений вязко-упругого тела с целью учета влияния временных эффектов в поведении материалов; рассматриваются особенности соответствующего изменения распределения напряжений, которое значительно отличается от результатов для соответствующей упругой задачи. Показано, что, хотя многие аспекты линейной теории достаточно развиты для решения важных технических задач, связанных с анализом напряжений, необходимы дальнейшие усилия для полного разрешения инженерных проблем в этой области. В частности, отсутствуют методы точных измерений свойств вязко-упругого материала при сложно-напряженном состоянии. Обсуждаются зависимости между способами описания вязко-упругого поведения материалов, а также их влияние на методы подхода к задачам анализа напряжений. Предлагаются простые практические способы измерений вязко-упругости и линейности. Кратко описано влияние измерений температуры, намечены пути развития нелинейной теории.

1. Введение

Вязко-упругость занимается изучением материалов, у которых сопротивление действию напряжений зависит от скорости, что связано с такими явлениями, как ползучесть при постоянном напряжении и релаксация при постоянной деформации. Например, изменение деформации при постоянном напряжении, которое было мгновенно приложено к вязко-упругому телу, поддерживалось в течение времени t_1 и затем было снято, как показано на рис. 1, а,

¹⁾ Lee E. H., Viscoelastic stress analysis, Proceeding of the first symposium on naval structural mechanics, New York, Oxford, London, Paris, 1960.

изображается графиком, приведенным на рис. 1, б. Здесь видна мгновенная упругая реакция OA , затем запаздывающая упругая деформация (упругое последствие) AB , сопровождаемая вязким течением, которое продолжается также на участке BC . После снятия напряжений в момент t_1 мгновенная упругая деформация немедленно исчезает, следуя CD , запаздывающая упругая деформация



Р и с. 1

a — изменение напряжений, b — изменение деформаций

исчезает в течение периода DE , при этом вязкое течение прекращается (участок EF). Это поведение существенно отличается от поведения упругого тела, для которого изменение деформаций просто воспроизводит изменение напряжений в соответствующем масштабе.

Такие зависимые от времени свойства оказывают значительное влияние на распределение напряжений в вязко-упругом теле, находящемся под действием поверхностных и массовых сил, или заданного смещения на поверхности. Например, при постоянной нагрузке распределение напряжений в случае квазистатического анализа, в котором пренебрегают силами инерции, может обнаруживать значительные изменения со временем, а напряжения в характерных точках тела могут меняться со временем весьма различным образом. Это противоречит теории упругости,

устанавливающей в данном случае постоянное поле напряжений. Вязко-упругость оказывает особенно большое влияние на остаточные и температурные напряжения. Последние обычно релаксируют с течением времени.

С ростом применения пластмасс и других новых материалов в конструкциях оборудования и сооружений возникла необходимость расширения области применения вязко-упругости для рационального проектирования. Более того, в настоящее время обнаруживается тенденция требовать более точного анализа задач, которые решались ранее с помощью теории упругости и в которых в действительности проявляется влияние временных эффектов. Такой проблемой является расчет сопротивления оснований при проектировании фундаментов [1, 2, 3]. Потребность использования предельной работоспособности материалов определяет необходимость учета влияния скоростей, в частности учета ползучести металлов при высоких температурах. Здесь мы сталкиваемся с быстро растущей потребностью создания эффективных методов решения задач анализа напряжений в вязко-упругих материалах и применения их к специальным проблемам.

В последние годы наблюдается значительный интерес к задачам из этой области, причем большие успехи достигнуты в трех главных направлениях: а) разработаны новые методы измерения свойств материалов, улучшены стандартные методы; б) установлены зависимости между различными способами математического описания вязко-упругого поведения, а также методы перехода от одного способа описания к другому. Это относится главным образом к ограниченной области линейного анализа, значение которого будет обсуждаться ниже. Наиболее важные методы описания изучены с точки зрения приложений к решению задач анализа напряжений; в) развиты методы подхода к анализу распределения напряжений как для квазистатических задач, так и для задач о распространении волн. Опять-таки большая часть этих работ посвящена линейным задачам, хотя достигнут прогресс и для нелинейных задач.

Несмотря на эти успехи, необходима согласованная программа действий в развитии этих трех направлений для того, чтобы успешно решать специальные задачи рас-

чета конструкций из вязко-упругих материалов. Все это справедливо и для ограниченной области линейной вязко-упругости. Главная экспериментальная трудность состоит в выполнении точных измерений вязко-упругих свойств материалов при сложном напряженном состоянии. В частности, необходимо знать основные характеристики свойств при однородном сдвиге и всестороннем расширении, а соответствующие методы измерения еще не разработаны. Положение особенно неблагоприятно для малых значений времени нагружения. Хотя известны замкнутые аналитические зависимости между различными математическими методами описания линейных вязко-упругих свойств, обсуждаемые в следующем параграфе этой статьи, но они часто не могут применяться непосредственно к результатам физических исследований, так как связаны уравнениями теории аналитических функций или требуют знания динамического сопротивления во всем интервале частот от нуля до бесконечности. В настоящее время предприняты попытки в направлении практических способов преобразования основных соотношений, но нужно стремиться к еще большей их простоте. Наконец, довольно большая работа по анализу напряжений в вязко-упругих материалах выполнена на основе специальных уравнений вязко-упругости, и теперь необходимы методы, которые могут быть обобщены на уравнения с менее ограниченной областью применения для расчета.

Упомянутые недостатки относятся только к анализу линейного вязко-упругого поведения. Эта ограниченная область имеет дело с уравнениями вязко-упругости, которые содержат линейные операторы, обычно дифференциальные или интегральные, рассматриваемые в следующем параграфе. Такие линейные операторы можно получить, например, если подобрать произвольную функцию ползучести при нагрузке, обеспечивающей заданное напряжение σ_0 , как показано на рис. 1, б, до снятия напряжения. Однако если последняя установлена, $\varepsilon = \varepsilon_0(t)$, то линейность требует, чтобы функция ползучести для напряжения $\alpha\sigma_0$, где α — произвольная постоянная, имела вид $\varepsilon = \alpha\varepsilon_0(t)$.

Твердое ракетное топливо, как это видно из рис. 2, где приводится серия кривых ползучести, заимствованная

у Блатца [4], приблизительно удовлетворяет этому требованию.

Вязко-упругое поведение определяется существованием временных эффектов, а линейность — тем фактом, что для любого отрезка времени деформации приближенно пропорциональны величине напряжения. Установлено, что

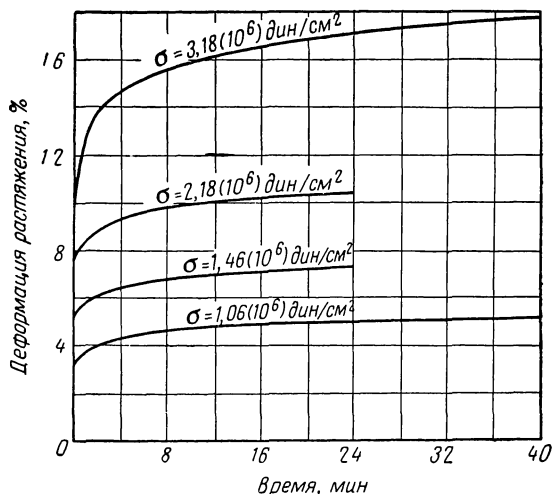


Рис. 2. График зависимости ползучести ракетного топлива от величины нагрузки (Блатц [4])

многие материалы ведут себя таким образом с достаточной степенью точности при напряжениях ниже некоторого предельного значения. Линейная теория охватывает, следовательно, важную область применения, а существующие методы анализа позволяют решить много технических важных задач на этой основе, о чем более подробно сказано ниже. Действительно, математически представляется возможным свести задачу определения напряжений в вязко-упругом твердом теле к соответствующей задаче для упругого тела той же формы и подверженного действию таких же поверхностных сил. При этом удастся использовать значительные успехи теории упругости для определения напряжений в вязко-упругих телах.

Если вязко-упругие эффекты обнаруживают нелинейность, то задача нахождения напряжений становится несравненно более сложной. Основы такой теории заложены Грином и Ривлином [5], однако в ближайшем будущем с помощью этой теории можно будет решить, по-видимому, лишь простейшие задачи. Таким образом, крайне важно убедиться, может ли обеспечить линейный вязко-упругий анализ достаточно хорошую аппроксимацию при решении частных задач расчета, ибо он учитывает влияние задержанной упругости и ползучести, которыми полностью пренебрегает теория упругости, и открывает хорошо разработанные методы решения. Вследствие больших трудностей и неразработанности нелинейной теории необходимо шире применять теорию линейной вязко-упругости, чтобы получить максимальное количество сведений о влиянии скоростных эффектов в задачах об определении напряжений. Как будет показано ниже, с помощью относительно простых опытов можно проверить применимость линейного вязко-упругого анализа для частных случаев.

Принимая во внимание все сказанное относительно этой области строительной механики, большая часть данной статьи будет посвящена последним из упомянутых работ и наиболее существенным проблемам линейного анализа. Можно надеяться, что эта статья будет способствовать развитию проблемы во всех направлениях, в результате чего будут созданы надежные методы расчета конструкций с применением материалов нового типа. Завершению работ по созданию законченных и надежных экспериментальных, а также теоретических методов анализа материалов, обладающих линейной вязко-упругостью, будут, по-видимому, сопутствовать параллельные успехи в исследованиях тел с нелинейной характеристикой, в результате которых будет создана прочная основа в области теории и эксперимента для решения общих задач. Отсутствие в настоящее время данных по широкому использованию разработанных методов линейного анализа представляет наиболее серьезный пробел в этой области, который можно относительно легко заполнить и тем самым реализовать значительные успехи теории, достигнутые в прошлом, в виде приложений к расчету конструкций. Это не означает, конечно, что работа над нелинейными задачами не должна прово-

даться параллельно, как это имеет место при рассмотрении специальных задач; однако при энергичных исследованиях линейные задачи могут быть решены в течение ближайших лет, общая же разработка нелинейных задач — дело более далекого будущего. Краткий обзор нелинейной теории будет дан в заключительном параграфе.

Так как главной задачей в развитии вязко-упругости является объединение точек зрения как в области экспериментальных, так и в области теоретических исследований, то в настоящей статье не было сделано попытки дать исчерпывающий обзор всех последних работ, появившихся в литературе, хотя и процитированы многие из них. Таким образом, данная статья не может рассматриваться как материал для справок, отражающий все крупные последние работы по вязко-упругости.

2. Законы линейной вязко-упругости

Сначала рассмотрим такие простые типы напряженных состояний, как растяжение или сдвиг, которые можно описать с помощью единственных компонент напряжений и деформаций. Если $\sigma(t)$ — изменение напряжений и $\epsilon(t)$ — соответствующее изменение деформаций, то закон линейной вязко-упругости, связывающий эти величины, имеет вид

$$P(\sigma) = Q(\epsilon), \quad (2.1)$$

где P и Q — линейные временные операторы.

Они могут быть дифференциальными операторами

$$P = \sum_{r=0}^p p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}, \quad Q = \sum_{r=0}^q q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}, \quad (2.2)$$

причем такая запись связана с широко применяемыми моделями из пружин и амортизаторов [6—8]. В этой формуле p_r и q_r являются константами материала, причем число таких констант, описывающих отдельный материал, определяет особенности его вязко-упругого поведения. В простейшем случае для так называемого материала

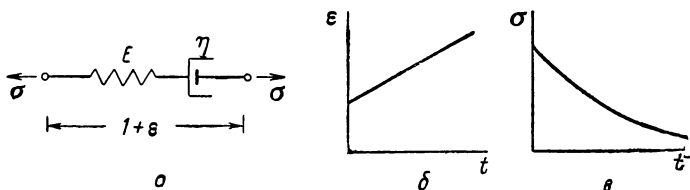
Максвелла уравнение (2.1) имеет вид

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{D}{E}\right)\sigma = D\varepsilon, \quad (2.3)$$

где D — оператор $\partial/\partial t$, E и η — константы. Эта форма записи связана с уравнением (2.2) соотношениями

$$p = 1, \quad p_0 = \frac{1}{\eta}, \quad p_1 = \frac{1}{E}, \quad q = 1, \quad q_0 = 0, \quad q_1 = 1 \quad (2.4)$$

и эквивалентна модели, показанной на рис. 3, причем E и η — соответственно модуль упругости пружины и вязкость жидкостного элемента. Модель описывает вязко-упругое поведение следующим образом: если сила $\sigma(t)$



Р и с. 3

a — модель материала Максвелла; b — кривая ползучести;
 c — кривая релаксации

приложена, как показано на рис. 3, a , то концы модели будут раздвигаться на величину $\varepsilon(t)$. Модель представляет собой лишь наглядное изображение дифференциального уравнения (2.3), не добавляя к нему ничего нового. Кроме того, пружина и амортизатор не имеют какого-либо физического аналога в механизме сопротивления материала действию напряжений. Однако модель может быть полезна, так как позволяет отчетливо представить себе особенности поведения материала под действием сил. Например, деформация тела, описываемого моделью Максвелла (рис. 3, a), при действии мгновенно приложенного и затем поддерживаемого на постоянном уровне напряжения состоит из мгновенной упругой и вязкой деформации, как это видно на рис. 3, b . При релаксации, связанной с мгновенно возникшей и поддерживаемой затем на постоянном уровне деформацией, напряжение равно начальному сопротивлению

упругого элемента, уменьшающемуся экспоненциально, как показано на рис. 3, в.

Материал Фойгта подчиняется дифференциальному соотношению

$$\sigma = E\varepsilon + \eta D\varepsilon, \quad (2.5)$$

при этом в (2.2) следует положить

$$p = 0, \quad p_0 = 1, \quad q = 1, \quad q_0 = E, \quad q_1 = \eta. \quad (2.6)$$

Соответствующая модель представлена на рис. 4, а. Сопротивление внезапно приложенному импульсу постоянного напряжения, действующему в течение времени t_1 и

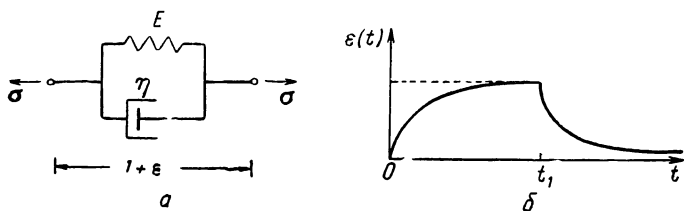


Рис. 4

а — модель материала Фойгта; б — кривые кинетики развития и спада деформации

затем снятому, иллюстрируется на рис. 4, б. Видно, что деформация нарастает асимптотически и после снятия нагрузки асимптотически приближается к нулю. При длительных временах сопротивление материала носит упругий характер, и в связи с этим явление называется *запаздывающей упругостью* (или упругим последствием).

Простейшее дифференциальное операционное уравнение, качественно описывающее все особенности кривых кинетики развития и спада деформации, изображенных на рис. 1, б, имеет вид

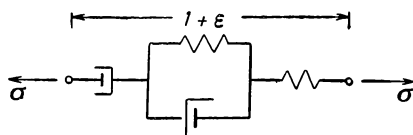
$$(p_0 + p_1 D + p_2 D^2) \sigma = (q_1 D + q_2 D^2) \varepsilon, \quad (2.7)$$

а соответствующая модель представлена на рис. 5. Отсюда видно, что этот материал объединяет особенности материалов Максвелла и Фойгта, обнаруживая мгновенную упругость, задержанную упругость и вязкое течение.

Операторы высших порядков не описывают качественно новых явлений, но необходимы для аппроксимации частных

кривых ползучести типа изображенной на рис. 1, б, если аналитическая форма, соответствующая уравнению (2.7), не подходит для этой цели.

Вследствие линейности дифференциальных операторов (2.2) к ним применим принцип наложения, которому



Р и с. 5. Четырехэлементная модель

подчиняются также и более общие линейные операторы (2.1). Пусть $\epsilon_1(t)$ — деформация, вызванная нагрузкой $\sigma_1(t)$, и ϵ_2 — деформация, вызванная нагрузкой $\sigma_2(t)$, при этом нагрузка равна

$$\alpha_1 \sigma_1(t) + \alpha_2 \sigma_2(t), \quad (2.8)$$

где α_1 и α_2 — произвольные константы, а результирующее изменение деформации определяется суммой

$$\alpha_1 \epsilon_1(t) + \alpha_2 \epsilon_2(t). \quad (2.9)$$

Этот результат верен, если образцы не подвергались деформациям до приложения нагрузки.

На основе этого принципа получены вязко-упругие операторы в интегральной форме. Например, если функция $J(t)$, известная как податливость при ползучести, описывает кривую ползучести при напряжении, равном единице, то изменение деформации, обусловленное изменением напряжения $\sigma(t)$, определяется уравнением

$$\int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau = \epsilon(t). \quad (2.10)$$

Левая часть этого уравнения известна как *интеграл Дюамеля* и получена в результате предположения о том, что напряжение составлено из приращений $d\sigma/d\tau \cdot d\tau$, каждое из которых приложено в момент времени τ и определяет вклад в деформацию ползучести, соответствующий

времени действия нагрузки. Левая часть уравнения (2.10) представляет собой предел суммы таких составляющих деформации ползучести. Она выражает закон вязко-упругости в форме наследственных интегралов, впервые предложенных Вольтерра [9]. Аналогичный оператор

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.11)$$

получается из кривой релаксации при помощи модуля $E(t)$, описывающего эту кривую при единичном напряжении, при условии пропорциональности, начиная с малых деформаций. Если кривые ползучести или релаксации, связанные с дифференциальными операторами (2.2), подставить в (2.10) и (2.11), то интегральные операторы будут представлять собой не более как эквивалентную математическую запись дифференциального уравнения вязко-упругости. Ядра интегральных операторов $J(t - \tau)$ и $E(t - \tau)$ связаны с функциями Грина дифференциальных операторов, т. е. с решениями дифференциальных уравнений при начальных разрывах некоторых производных.

Другой метод измерения и описания вязко-упругого поведения материала связан с определениями сопротивления при установившихся вынужденных колебаниях с постоянной круговой частотой ω . В случае линейной системы как напряжение, так и деформация будут меняться синусоидально с одной и той же частотой ω вынуждающей силы, поэтому их удобно выражать как действительную часть комплексных переменных

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \quad (2.12)$$

Вследствие влияния задержанной упругости и вязкого течения напряжения и деформации в общем случае могут не совпадать по фазе, так что σ_0 или ε_0 или обе величины вместе могут быть комплексными числами. Вследствие линейности отношение амплитуд и разность фаз остаются неизменными при постоянной частоте и не зависят от амплитуды вынуждающей силы. Вязко-упругие свойства материала могут быть описаны с помощью комплексного модуля

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E_1(\omega) + iE_2(\omega) \quad (2.13)$$

или комплексной податливости

$$J^*(\omega) = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} = J_1(\omega) - iJ_2(\omega). \quad (2.14)$$

Изменение одного из этих параметров в функции частоты представляет собой дополнительный способ описания вязко-упругих свойств материала. Представляя с помощью теоремы Фурье произвольную зависимость напряжения или деформации от времени в виде суммы или интеграла синусоидальных членов, нетрудно видеть, как эта форма оператора применяется к произвольному нагружению.

Между различными способами описания вязко-упругих свойств существуют аналитические зависимости, упомянутые ранее, так что можно перейти от одного способа к другому. Гросс [10] обобщил такого рода аналитические методы, обзор которых приводится также Алфреем [6], Алфреем и Герни [11], Лидерманом [7] и Ставерманом и Шварцлем [8]. Как видно из (2.13) и (2.14), простейшее преобразование имеет вид

$$E^*(\omega) = \frac{1}{J^*(\omega)}. \quad (2.15)$$

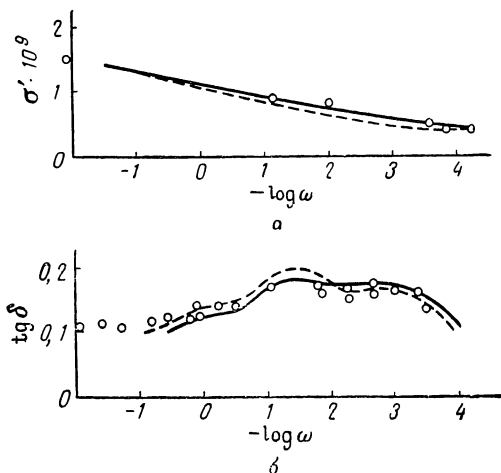
Обращаясь к дифференциальным операторам (2.2) в случае вынужденных колебаний, заметим, что оператор D эквивалентен умножению на $i\omega$ вследствие того, что функция от времени имеет вид $e^{i\omega t}$, в результате получим

$$E^*(\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)}, \quad J^*(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}. \quad (2.16)$$

Таким образом, E^* и J^* — рациональные функции $i\omega$. Кольский и Ши [12] предложили для описания результатов измерения свойств материала в широком частотном диапазоне использовать трансцендентные функции.

Другие способы преобразования не столь очевидны и описаны в цитированных работах. Существует прямая параллель между этой областью и анализом линейных электрических цепей, причем свойства цепи могут быть выражены с помощью импеданса сопротивления при ступенчатом воздействии или с помощью дифференциальных уравнений, члены которых связаны с компонентами цепи. Таким образом, успехи в анализе электрических цепей могут быть использованы в этой области исследований вязко-упругости.

При анализе свойств вязко-упругого материала следует иметь в виду, что функции вязко-упругого сопротивления, такие, как функция ползучести, известны с некоторой точностью в ограниченном интервале времени $t_1 \rightarrow t_2$, причем $0 < t_1 < t_2 < \infty$. Аналогично этому, измерения комплексного модуля выполнены в ограниченном диапазоне



Р и с. 6

а — зависимость модуля сдвига от логарифма частоты;
б — зависимость тангенса угла сдвига фаз от логарифма частоты (Бенбоу [18]).
 — анализ Фурье, ---- метод Алфрея, ○ ○ ○ — динамические измерения

частот. Таким образом, математические теории преобразования, развитые выше, не могут применяться непосредственно и необходимы приближенные методы преобразования операторов.

Лидерман [14] для определения комплексной податливости полиизобутилена из данных по ползучести успешно применял метод преобразования Лапласа, развитый для приближенного вязко-упругого анализа Шварцлем [13]. Лидерман [15] рассмотрел этим методом также другие задачи подобного рода. Методы исследования, основанные на использовании разложения основных вязко-упругих функций в ряды Фурье, развиты в работах [16—18]. Бенбоу [18] определял действительную часть комплексного

модуля сдвига и отношение мнимой части комплексного модуля сдвига к действительной (равное тангенсу угла сдвига фаз) для полиизобутилена из данных по ползучести. Измеренная и вычисленная характеристики динамического поведения, представленные на рис. 6, хорошо согласуются между собой. Сравнение выполнено с помощью аппроксимации Алфрея [6], являющейся частным случаем более общего метода, развитого Лидерманом [15]. Другой, менее трудоемкий способ, где разложение в ряды Фурье заменяется методом итераций, разработан Реслером и Твином [19]. Удобный и точный способ замены интегральных операторов численным интегрированием описан Гопкинсом и Хаммингом [20]. Приближенный графо-аналитический метод возможно более точного определения параметров четырехэлементной модели типа представленной на рис. 5 по изменениям комплексной податливости в некотором диапазоне частот изложен Блендом и Ли [21]. Рис. 7а и 7б иллюстрирует точность, с которой такой дифференциальный оператор второго порядка описывает свойства полиизобутилена в ограниченном диапазоне частот.

Итак, мы рассмотрели одномерные задачи, где напряжения и деформации определяются лишь единственными компонентами. В задачах о трехмерном распределении напряжений мы должны учитывать изменение компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ и тензора деформации $\epsilon_{ij}(t)$. Тензорные индексы i и j принимают значения 1, 2, 3, связанные с осями x_1, x_2, x_3 . Общий закон линейной вязко-упругости должен связывать линейные временные операторы от компонент напряжений с такими же операторами от компонент деформаций. Можно показать, что для изотропного материала в силу независимости от поворота эта взаимосвязь сводится к двум парам операторных уравнений, одно из которых связывает девиаторы напряжений и деформаций, определяющие сдвиговые эффекты, а другое — среднее гидростатическое напряжение и всестороннее расширение. Последние записываются в форме

$$Ps_{ij} = Qe_{ij}, \quad (2.17)$$

$$P'\sigma_{ii} = Q'\epsilon_{ii}, \quad (2.18)$$

где s_{ij} — девиатор напряжений, e_{ij} — девиатор деформаций и в соответствии с правилом о суммирующих индексах

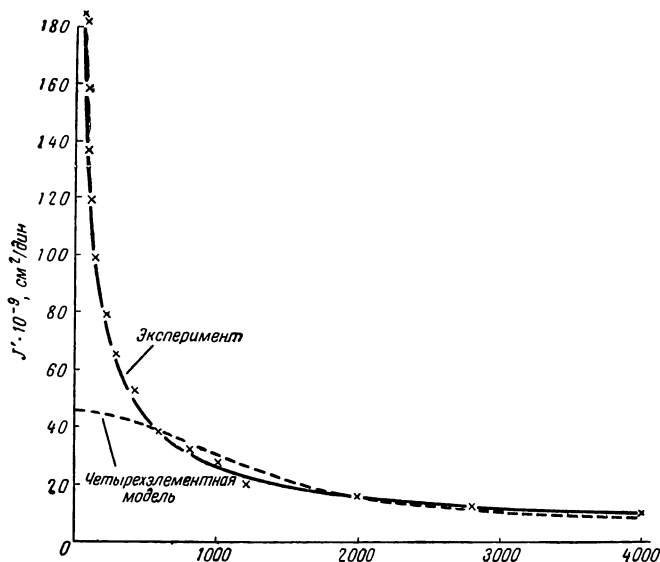


Рис. 7а. Сравнение частотных зависимостей J' , измеренных Блендом и Ли [21] экспериментально, и полученных расчетным путем для четырехэлементной модели

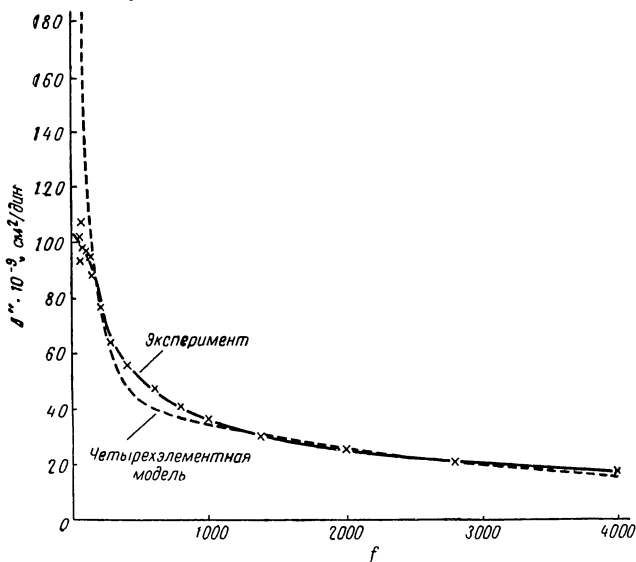


Рис. 7б. Сравнение частотных зависимостей J'' , измеренных Блендом и Ли [21] экспериментально, и полученных расчетом для четырехэлементной модели

σ_{ii} — утроенное среднее гидростатическое напряжение, а ϵ_{ii} — объемное расширение. Две пары операторов аналогичны двум независимым упругим константам изотропного упругого материала. Действительно, для изотропного упругого тела уравнения, аналогичные (2.17) и (2.18), имеют вид

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad (2.19)$$

$$\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}, \quad (2.20)$$

где G — модуль сдвига и K — модуль объемного сжатия. Представления, касающиеся различных форм записи операторов P и Q , обсуждавшиеся в этом разделе, применимы независимо к P , Q и P' , Q' .

Если использовать способ наложения, то поведение материала при других напряженных состояниях может быть описано с помощью основных операторных уравнений (2.17) и (2.18). Например, путем наложения девиатора и шарового тензора напряжений можно получить простое растяжение и вывести операторное уравнение, связывающее напряжения и деформации при растяжении. Процесс аналогичен установлению зависимости между упругими константами, и соответствующие формулы могут рассматриваться как операторные уравнения вязко-упругости. Например, модуль Юнга E связан с модулями сдвига и объемного сжатия зависимостью

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad (2.21)$$

а соответствующий вязко-упругий оператор определяется, если принять во внимание формулы (2.17), (2.18), (2.19) и (2.20), из которых следует, что

$$\frac{Q}{P} \rightarrow 2G, \quad \frac{Q'}{P'} \rightarrow 3K. \quad (2.22)$$

Из формулы (2.21) имеем

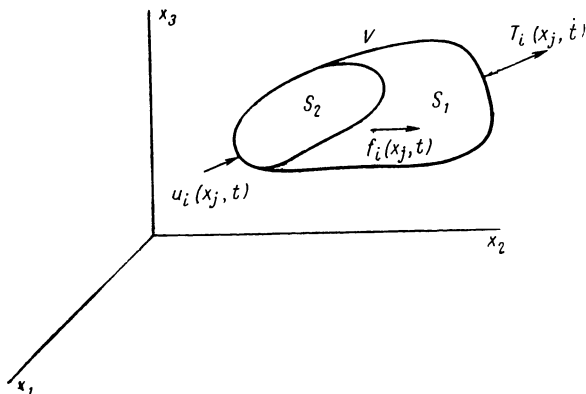
$$E(t) = \frac{3 \frac{Q'}{P'} \cdot \frac{1}{2} \frac{Q}{P}}{\frac{Q'}{P'} + \frac{1}{2} \frac{Q}{P}}. \quad (2.23)$$

Как было отмечено в предыдущем параграфе, такая комбинация основных операторов представляет собой линейный оператор этого же типа и может рассматриваться как уравнение зависимости между изменением растягивающих напряжений и соответствующей деформацией растяжения для вязко-упругого тела.

Выше мы занимались главным образом вязко-упругими операторами, которые рассматривались независимо от основных физических свойств материала, определяющих такого рода поведение. Сущность механизма вязко-упругого поведения в высокомолекулярных полимерах обсуждается в сборниках [8,11]. Недавно Био [22] и Циглер [23] обсуждали теорию вязко-упругости с точки зрения термодинамики необратимых процессов.

3. Анализ напряжений

Основная задача вычисления распределения напряжений и деформаций в неоднородном поле напряжений иллюстрируется на рис. 8. Вязко-упругое тело V подвержено



Р и с. 8

действию поверхностных сил $T_i(x_j, t)$ на части S_1 поверхности S и испытывает перемещения $u_i(x_j, t)$ на части S_2 . Последняя может быть связана с опорой, где перемещения равны нулю. Могут действовать также объемные силы

$f_i(x_j, t)$ на единицу объема. Кроме законов вязко-упругости, обсуждавшихся в предыдущем параграфе, должны удовлетворяться также уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где ρ — плотность материала. Компоненты деформации связаны с уравнениями перемещений, справедливыми для малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.2)$$

Компоненты тензора напряжений вблизи поверхности S_1 связаны с поверхностными силами соотношением

$$T_i = \sigma_{ij} n_j, \quad (3.3)$$

где n_j — направляющие косинусы внешней нормали. Задачи анализа напряжений заключаются в решении системы уравнений (2.17), (2.18), (3.1), (3.2) и (3.3) при заданных перемещениях на S_2 . Эта задача отличается от аналогичной задачи упругости, так как даже для квазистатического анализа, в котором пренебрегают силами инерции, что эквивалентно $\rho = 0$ в (3.1), время играет существенную роль.

Если заданы дифференциальные вязко-упругие операторы, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными с пространственными и временными независимыми переменными. Такое решение задачи связано с обычными ограничениями теории малых деформаций, т. е. оно удовлетворяет граничным условиям только в недеформированном состоянии, и заданные поверхностные силы полагаются независимыми от деформации. Эти условия не соблюдаются в задачах устойчивости, а также при решении таких проблем, как контактная задача Герца. Как и в теории упругости для вязко-упругого тела, такие задачи приводят к нелинейным системам. Возможно также задание смешанных граничных условий, когда на одной и той же точке поверхности заданы и компоненты поверхностных нагрузок, и компоненты

перемещений, хотя последние и не включены в задачу, сформулированную выше.

Поскольку время фигурирует как в уравнениях, так и в граничных условиях, то должна приниматься во внимание возможность изменения областей S_1 и S_2 в процессе нагружения, а также изменения со временем поверхности S и объема V . Примерами такого рода анализа напряжений могут служить случаи, когда внутри тела распространяется трещина или когда горит зерно ракетного топлива, причем твердый материал превращается в газ.

Решения квазистатических задач упругости зависят только от мгновенной конфигурации тела и граничных условий, но в случае вязко-упругости вся история процесса оказывает влияние на распределение напряжений и деформаций в заданный момент. Наличие производных по времени вызывает необходимость учета начальных условий, требования к которым определяют порядком дифференциальных вязко-упругих операторов задачи. Как правило, имеют дело с первоначально невозмущенными телами и нулевыми начальными условиями; в этой статье мы ограничимся рассмотрением только этого случая.

Если S_1 , S_2 и V не меняются в процессе нагружения, то применение преобразования Лапласа к системе уравнений исключает временную зависимость [24] и вязко-упругая задача превращается в упругую задачу в преобразованных переменных. Уравнения (2.17), (2.18), (3.1), (3.2) и (3.3) приобретают вид

$$P(p) \bar{s}_{ij} = Q(p) \bar{e}_{ij}, \quad (3.4)$$

$$P'(p) \bar{\sigma}_{ii} = Q'(p) \bar{\varepsilon}_{ii}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i = \rho p^2 \bar{u}_i, \quad (3.6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.7)$$

$$\bar{T}_i(x_j, p) = \bar{\sigma}_{ij} n_j \text{ на } S_1, \quad (3.8)$$

где черта сверху означает преобразование Лапласа по времени. Для нулевых начальных условий оператор D заменяется независимой переменной преобразования p в преобразованных уравнениях [25]. Так, если вязко-упругие

операторы суть дифференциальные операторы в форме (2.2), то p просто заменяет D в преобразованных уравнениях вязко-упругости (3.4) и (3.5). Если интегральные операторы применяются в форме (2.10) или (2.11), то в силу теоремы о свертке [25] преобразованные уравнения получаем в виде

$$\bar{J}(p) p \bar{\sigma} = \bar{\epsilon}, \quad \bar{\sigma} = \bar{E}(p) \bar{\epsilon} \quad (3.9)$$

для нулевых начальных условий.

Уравнения (3.4) — (3.8) с преобразованными граничными условиями при условии, что \bar{u}_i задана на S_2 , представляют задачу теории упругости, называемую сопряженной упругой задачей, в которой упругие постоянные и значения на границе являются функциями переменной p . Если ее удастся решить, то $\bar{\sigma}_{ij}(x_k, p)$ будут представлять собой изображения изменения напряжений в начальной вязко-упругой задаче и обращение σ_{ij} дает искомое распределение напряжений.

С помощью этого метода были решены многие технические важные задачи. Этот метод позволяет рассматривать решение любой упругой задачи как класс решений вязко-упругих задач, у которых упругие константы и граничные условия суть соответствующие функции переменной p . Такой пример приводится на рис. 9, заимствованном из работы Вудворда и Радока [26], где представлено изменение со временем окружного напряжения для полого вязко-упругого цилиндра, подверженного действию постоянного внутреннего давления и усиленного снаружи упругой оболочкой. Внутреннее давление приложено мгновенно в момент $t=0$ к первоначально недеформированному цилиндру. Решение получено из хорошо известной упругой задачи Ламэ с помощью преобразования Лапласа. Преобразованное окружное напряжение определяется из теории упругости

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(r, p) = \bar{P}_I(p) \left[\frac{\frac{\alpha(1-\nu^2)}{\alpha\nu(1+\nu)} - E \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) - \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right)}{\frac{\alpha(1-\nu^2)}{\alpha\nu(1+\nu)} - E \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) - \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \right], \quad (3.10)$$

где $P_I(t)$ — изменение внутреннего давления, которое в данном случае представляет собой ступенчатую функцию, α — константа, определяющая упругость наружной подкрепляющей оболочки, r — радиус, b — внешний и a — внутренний радиусы, $E(p)$ — преобразованный вязко-упругий

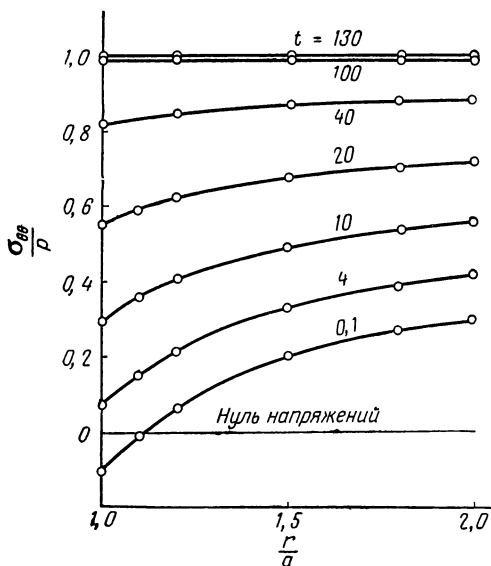


Рис. 9. Изменение со временем распределения окружных напряжений в цилиндре из материала Максвелла (по Вудворду и Радоку [26])

оператор, соответствующий упругому модулю Юнга, $v(p)$ — преобразованный вязко-упругий оператор, соответствующий коэффициенту Пуассона. Как отмечено в конце предыдущего параграфа, эти операторы связаны с основными операторами (2.17), (2.18) зависимостями между соответствующими упругими константами. Уравнение (2.23) определяет $E(p)$ как функцию отношений основных операторов $Q(p)/P(p)$ и $Q'(p)/P'(p)$, а соответствующее

выражение для $v(p)$ имеет вид

$$v(p) = \frac{Q'/P' - Q/P}{2(Q'/P' + \frac{1}{2} \cdot Q/P)} . \quad (3.11)$$

На примере, представленном на рис. 9, отношение Q/P соответствует при сдвиге свойствам материала Максвелла, описываемым уравнением (2.3); по отношению к объемному сжатию тело считается упругим, т. е. $Q'/P' = 3K$.

Если дифференциальные операторы определяются уравнениями (2.2), то комбинированные операторы, такие, как (3.11) или (3.10), могут быть представлены как рациональные функции от p (т. е. в виде отношения полиномов) с помощью алгебраического метода приведения к общему знаменателю. Такие операторы, примененные к преобразованным величинам, могут быть обращены непосредственно с помощью метода разложения на простые дроби [25]. Особое преимущество операторов типа (2.2) для решения задач о напряженном состоянии заключается в том, что здесь применим прямой метод обращения; однако, как указано выше, уравнение (2.2), соответствующее модели с конечным числом элементов, не имеет такой общности, как другие операторные представления.

Рисунок 9 иллюстрирует значительное изменение распределения напряжений со временем, если цилиндр подвержен действию постоянного внутреннего давления. Картина противоположна результатам решения упругой задачи, в которой распределение напряжений при заданных внешних силах постоянно. Подобное изменение можно использовать при решении инженерных задач, подбирая материалы с такими характерными временами (релаксации, последействия), чтобы при интенсивном нагружении напряжения были ограничены.

Были решены многочисленные задачи рассмотренного выше типа [1, 3, 24, 26—28]. Рид [29] развил аналогичные методы с помощью преобразования Фурье, Бленд [30] дал пример использования одностороннего преобразования Фурье. Вольтерра [33], Фройденталь и Лорш [2] решили некоторые задачи с помощью метода разделения переменных. Био [22, 31] рассмотрел задачи о динамических напряжениях, а Мандель [32] — задачи о колебаниях. Последние приводят к сопряженным упругим задачам

с объемными силами, пропорциональными перемещениям, что ограничивает область упругих решений, пригодных для использования.

Существуют специальные случаи, когда выражения для распределения упругих напряжений не содержат упругих констант. К такому типу задач относятся плоская квазистатическая задача, где напряжения определяются заданными граничными условиями, а также случай взаимно уравновешенных сил, действующих на поверхности многосвязной области. Вязко-упругие операторы не фигурируют в уравнениях, описывающих распределение вязко-упругих напряжений, поэтому последнее идентично соответствующему упругому решению. Алфрей [34] предложил теорему в такого рода случаях для несжимаемых тел.

Если S_1 и S_2 меняются со временем, то описанный выше метод нельзя применять непосредственно, так как для любой точки поверхности, разделяющей S_1 и S_2 , ни T_i , ни u_i не известны на протяжении всего процесса нагружения, поэтому их изображение не может быть получено и сопряженная упругая задача является неопределенной. Такие и более общие задачи, когда меняются S и V , могут быть в некоторых случаях решены раздельным интегрированием по времени и по пространственным переменным. Это в некоторых случаях представляется возможным в квазистатических задачах, поскольку производные по времени и по координатам пространства в системе уравнений (2.17), (2.18), (3.1) и (3.2) разделены. Первые две группы содержат лишь производные по времени, а последние две — производные по пространственным координатам. Так как при этом, чтобы удовлетворить начальным и граничным условиям, в решение должны быть включены произвольные функции, процесс решения становится длительным и запутанным; поэтому Радок [35] ввел упрощение, которое заключается в использовании соответствующего упругого решения, где упругие константы заменены вязко-упругими операторами.

В некоторых задачах окончательные упругие решения могут рассматриваться как исходные данные для вязко-упругих решений. Например, если упругие константы входят как полиномиальные коэффициенты в выражения компонент напряжений и применяются дифференциальные операторы в виде (2.2), то компоненты вязко-упругих на-

пряжений удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, решение которых дает распределение вязко-упругих напряжений. Пример этого метода дан Радоком и Ли [36], определившими распределение напряжений в цилиндре с аннигилирующей внутренней поверхностью. При этом методе могут возникнуть трудности, поскольку нулевая компонента упругих напряжений может соответствовать нулю, что получается, когда вязко-упругий оператор применяется к этой же компоненте вязко-упругого тела. Само вязко-упругое напряжение может и не равняться нулю, а определяться общим интегралом соответствующего однородного уравнения, если рассматриваются дифференциальные операторы. Таким образом, граничные условия могут отличаться от условий соответствующей упругой задачи.

Таким примером является вязко-упругий аналог контактной задачи Герца. Так как на поверхности контакта задаются перемещения, а за ее пределами напряжения равны нулю, то изменение площади контакта в процессе нагружения определяет случай, когда S_1 и S_2 меняются, и преобразование Лапласа не может быть использовано. Однако, как показано Ли и Радоком [37], здесь применим операционный метод, основанный на использовании соответствующей упругой задачи. Для несжимаемого материала, в который внедряется жесткий шар радиусом R , зависимость между силой нажатия F и радиусом контакта l в соответствии с решением Герца имеет следующий вид:

$$F = \frac{8}{3} \frac{2G}{R} l^3. \quad (3.12)$$

В случае вязко-упругого тела из уравнения (2.22) получим $2G \rightarrow Q/P$, и формула (3.12) принимает вид

$$PF(t) = \frac{8}{3} \frac{Q}{R} [l(t)]^3. \quad (3.13)$$

Аналогичным образом давление в зоне контакта определяется уравнениями для упругого тела

$$p(r) = \frac{4}{\pi} \frac{2G}{R} \sqrt{l^2 - r^2} \quad (3.14)$$

и для вязко-упругого

$$Pp(r, t) = \frac{4}{\pi} \frac{Q}{R} \sqrt{l^2 - [r(t)]^2}. \quad (3.15)$$

При такой интерпретации упругого решения могут возникнуть трудности, отмеченные выше; однако в данном случае картина будет полностью выяснена, если давления $p(r, t)$, определяемые уравнением (3.15), мы будем рассматривать как заданные граничные условия. При этом можно использовать метод преобразования Лапласа. Установлено, что трудности проявляются, если величина области контакта уменьшается. Напряжение, вместо того чтобы равняться нулю в зоне между границей области контакта в данный момент и прежней границей, когда площадь ее была максимальной, определяется общим интегралом соответствующего однородного уравнения, обуславливающим некоторое остаточное поверхностное напряжение и после того, как контакт прекратился. Так как оно соответствует точному вязко-упругому решению, то последнее не удовлетворяет условиям контактной задачи, для которой поверхностные силы должны равняться нулю за пределами области контакта. Такие трудности не возникают, если поверхность контакта не уменьшается по величине.

Уравнения (3.13) и (3.15) могут быть решены для достаточно общих вязко-упругих операторных соотношений. Так если поведение при сдвиге описывается с помощью податливости при ползучести (2.10), то уравнение (3.13) принимает вид

$$\int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{dF(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{8}{3} \frac{1}{R} [l(t)]^3, \quad (3.16)$$

где $F(t)$ представляет собой изменение полной нагрузки. Для ступенчатой функции нагружения с амплитудой F_0 уравнение (3.16) принимает вид

$$J(t) = \frac{8}{3} \frac{1}{R} [l(t)]^3. \quad (3.17)$$

Отсюда, как и следовало ожидать, видно, что для тела, обнаруживающего ползучесть при сдвиге, деформация которого при постоянном напряжении непрерывно растет, площадь контакта при неизменной силе давления будет непрерывно увеличиваться. Для тела, обнаруживающего упругое последствие, деформация которого асимптотически приближается к конечному максимальному значению,

площадь контакта при неизменной силе давления также будет приближаться к конечному значению.

Уравнение (3.15) можно истолковать точно таким же способом, причем результирующее распределение контактных напряжений обнаруживает интересные особенности. В области контакта имеется центральное углубление, сравнимое с аналогичным углублением в упругом случае, где система сохраняет „память“ о начальных контактных напряжениях, которые концентрировались на меньшей площади. Эти напряжения, можно сказать, образуют центральную впадину, которая в последующем оказывает непрерывное влияние на распределение давлений.

Большая часть работ, обсуждавшихся выше, была посвящена квазистатическим задачам, в которых пренебрегали инерционным членом уравнения (3.1). Если ввести в рассмотрение этот член, то анализ будет охватывать также задачи о распространении волн и вибрациях, но теория становится более сложной. Задачи об установившихся колебаниях рассматривались Адлером с сотрудниками [38], Био [22, 31], Эстрайхером [39] и Вольтерра [9]. Анализ работы испытательных приборов, основанных на колебаниях, например мерного стержня [40], также относится к этой категории задач. Большая часть работ по распространению волн ограничивается одномерными задачами о продольных или поперечных волнах в стержнях. Одномерное уравнение движения имеет вид

$$\rho P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (3.18)$$

так что, если используются дифференциальные вязко-упругие операторы, то может быть решено дифференциальное уравнение в частных производных, порядок которого определяется порядком вязко-упругого оператора. Решения для ступенчатой функции нагружения, а также удара с постоянной скоростью получены Ли и Моррисоном [41] для операторов первого и второго порядков. Эти решения обнаруживают интересные весьма существенные особенности явлений у моделей различных типов. Кольский [42] использовал разложение Фурье для анализа распространения импульса напряжения в теле, описываемом комплексным модулем, и получил удовлетворительное согласование с экспериментом.

Этот метод не ограничен уравнениями операторного типа и, по-видимому, является удобным методом анализа в общем случае.

4. Обсуждение результатов

В приведенном обзоре изложены основы теории решения задач анализа напряжений для линейных вязко-упругих материалов. Было подчеркнуто значение задачи создания методов измерения вязко-упругого поведения материалов, установления вязко-упругих операторов, математически описывающих деформационные свойства, и использования их при решении задач о распределении напряжений. В настоящее время, как отмечено во введении, успехи в этих областях не везде одинаковы и необходимо дальнейшее сосредоточение усилий для полного решения этих задач.

Для любого конкретного тела или конструкции, использующей материал, в котором определяется распределение напряжений, теория, изложенная выше, дает простые методы оценки влияния вязко-упругости и линейности. Если установлена линейная вязко-упругость, то для решения задач могут применяться методы, описанные выше.

Для малых деформаций все уравнения (2.17), (2.18), (3.1), (3.2), (3.3), устанавливающие распределение напряжений, являются линейными, так что если граничные условия определяют заданные нагрузки или перемещения, то вся система является линейной и будет подчиняться принципу наложения. Так как уравнения (3.1), (3.2) и (3.3) являются линейными в случае малых деформаций, осуществимых при опытных нагружениях, то экспериментальная проверка принципа наложения является одновременно проверкой линейности вязко-упругих операторов. Линейность может быть также проверена по величине сопротивления какому-нибудь действию, например путем сравнения величины приложенной нагрузки и вызванного ею поворота элемента поверхности тела. Пусть, например, изменение нагрузки задается уравнением

$$L(t) = L_1(t), \quad (4.1)$$

а соответствующий ей прогиб, компонента напряжения, поворот тела или конструкции — уравнением

$$\delta(t) = \delta_1(t). \quad (4.2)$$

Если затем нагрузка изменилась до значения

$$L(t) = \alpha_r L_1(t), \quad (4.3)$$

где α_r — ряд констант, охватывающих область нагрузок, в пределах которой нужно произвести анализ напряженного состояния, то деформация изменяется по закону

$$\delta(r) = \delta_r(t), \quad (4.4)$$

определяемому из результатов измерений. Принцип наложения требует, чтобы

$$\delta_r(t) = \alpha_r \delta_1(t), \quad (4.5)$$

и легко проверяется путем построения кривых $\delta_r(t)/\alpha_r — t$. Если линейность соблюдается, то мы получаем единую кривую $\delta_1(t) — t$. Такой опыт легко осуществим, так как при этом может испытываться любая конструкция, составной частью которой является исследуемый материал, причем нет необходимости изготовления специальных образцов и возможно использование любой программы изменения нагрузок.

Единственное требование к нагружающему устройству состоит в том, чтобы оно было способно осуществить пропорциональное нагружение $\alpha_r L_1(t)$ во всей области значений α_r . Возможность применения постепенного нагружения исключает трудности, обусловленные вибрацией, связанной с мгновенным нагружением в опытах на ползучесть и релаксацию. Более того, испытания могут быть выполнены при условиях, приближающихся к условиям работы конструкции, и при этом будут получены сведения для интересующего нас диапазона напряжений. Даже если проверка была связана с измерениями одной только пары переменных нагрузка — деформация в каком-нибудь самом простейшем опыте, последний служит проверкой применяемой комбинации операторов, как, например, полученных в задаче о цилиндре, подверженном внутреннему давлению [см. уравнение (3.10)]. Предполагается, что линейность соблюдается, если оба основных оператора

линейны, что является весьма необычным обстоятельством. Однако для подтверждения вывода может быть предпринята проверка по другим переменным. Квастатическое равномерное гидростатическое давление, действующее на однородное тело, вызывает чистое сжатие, не сопровождающееся деформациями сдвига, так что линейность с помощью такого испытания может быть установлена даже в том случае, если поведение тела при сдвиге является нелинейным. Для более сложных систем, по-видимому, нельзя добиться такого разделения. Недавно такие испытания были удовлетворительно проведены на грампластинках, когда образцы материала было очень трудно изготовить.

Линейная схема должна удовлетворять требованию инвариантности отношения $\delta_r(t)/\alpha_r$, влияние вязко-упругости сказывается в различии форм кривых $\delta_r(t)/\alpha_r - t$ и $L_1(t) - t$. Для квазистатического случая ординаты их должны быть пропорциональны, вязко-упругость обуславливает запаздывание кривых деформации. Эффекты инерции оказывают качественно подобное влияние, поэтому они должны быть пренебрежимо малыми в опытах, когда вязко-упругий материал пытаются отличить от упругого, хотя это ограничение и не является необходимым при проверке линейности.

Когда подтверждена линейность вязко-упругого поведения, то необходима постановка тщательно разработанных опытов для создания известных простых полей напряжений с целью определения основных вязко-упругих параметров. Обычно используются простые программы нагружения, например ступенчатая программа для определения податливости при ползучести или установившееся динамическое нагружение для комплексного модуля. По имеющимся у автора сведениям, таких экспериментальных методов для точного определения основных вязко-упругих операторов еще не разработано. Свойства при всестороннем расширении вообще трудно определять точно [43], однако даже при измерениях модуля сдвига часто уделяется недостаточное внимание вопросу осуществления в образце известного распределения напряжений. При этом невозможны точные измерения модуля. Теоретически возможно определение основных сдвиговых и объемных

операторов из любых способов измерения вязко-упругого сложного сопротивления. Особенно простым является способ вычисления объемного сопротивления из испытаний на сдвиг и растяжение. На практике, однако, такие испытания связаны со значительной потерей точности, так как при вязко-упругом поведении обычно доминируют сдвиговые эффекты, и объемное сопротивление составляет лишь малую разность двух групп измерений.

В § 2 и 3 этой статьи мы видели, что способ записи вязко-упругих операторов оказывает большое влияние на степень сложности решения задачи анализа напряжений. Появляются рациональные функции операторов, такие, как в уравнениях (2.23), (3.10) и (3.11), которые, если дифференциальные операторы записаны в виде (2.2), посредством алгебраического приведения к общему знаменателю превращаются в новые операторы такого же типа. Если порядок операторов невелик, то зависимое от них распределение напряжений определяется просто. Это особенно относится к задачам, решаемым с помощью преобразования Лапласа; так, здесь применим метод разложения на простые дроби.

В некоторых случаях к простому решению приводят другие формы операторов, например податливость при ползучести в контактной задаче (3.16); однако методы использования интегральных операторов в задачах анализа напряжений развиты в настоящее время не так хорошо, как для дифференциальных операторов. Удобно использование комплексного модуля с помощью анализа Фурье, однако метод может применяться лишь в том случае, когда мы имеем дело с сопротивлением материала установившимся колебаниям, и не пригоден для задач, связанных с меняющимися во времени контурами тел. Здесь, однако, возникают трудности, связанные с использованием дифференциальных операторов конечного порядка. Последние обладают меньшей общностью по сравнению с интегральной или комплексной формой.

Кольский и Ши [12] показали, в частности, что операторы низкого порядка не могут описать измеренные комплексные модули в широком интервале частот. Чтобы иметь возможность использовать преимущества дифференциальных операторов конечного порядка, при анализе

вязко-упругих напряжений важно исследовать область частот, необходимую для адекватного описания неустановившейся схемы нагружения. Формально неустановившаяся схема может быть представлена с помощью интеграла Фурье, который в общем случае охватывает весь спектр

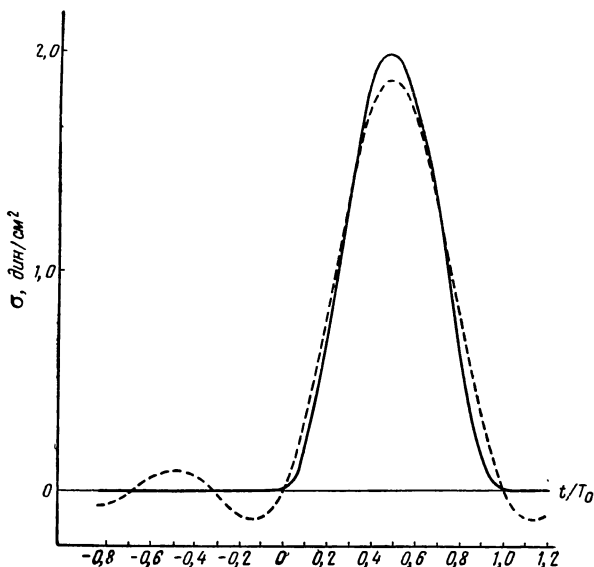


Рис. 10. Импульс напряжений и его аппроксимация с помощью рядов Фурье

частот, начиная от нуля; однако упругое последствие стремится сгладить влияние предшествующих нагружений, относящихся к более далекому прошлому; компонента, связанная с вязким течением, может быть выделена особо и поэтому без заметной потери точности возможно использование рядов Фурье в ограниченной полосе частот.

Ряд Фурье определяет периодическую функцию, однако влияние предыдущего импульса может быть полностью сглажено до наступления последующего, поэтому такое разложение является удовлетворительным. На рис. 10 изображено разложение в ряды Фурье импульса напряже-

ний, описываемого уравнениями

$$\begin{aligned}\sigma &= 0, & -4T_0 \leq t \leq 0, \\ \sigma &= \left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T_0}\right), & -0 \leq t \leq T_0, \\ \sigma &= 0, & T_0 \leq t \leq 4T_0,\end{aligned}\quad (4.6)$$

причем основной период выбран равным $8T_0$. Десять членов ряда Фурье дают пунктирную линию, а двадцать — кривую, которая так близко расположена к заданному импульсу, что на рис. 10 различия между ними не видно.

Таким образом, двадцатикратного изменения частот вполне достаточно для воспроизведения этого импульса, если только время между импульсами $7T_0$, когда напряжение равно нулю, является достаточным для полного сглаживания влияния предыдущего импульса до наступления последующего. При рассмотрении данного случая величина T_0 была выбрана так, что комплексная податливость, представленная на рис. 7, могла служить для определения деформаций, порожденных этим импульсом напряжений, в рассматриваемом диапазоне частот. Из рис. 7 видно, что при двадцатикратном отношении частот возможно удовлетворительное описание тела с помощью четырехэлементной модели.

Сплошная линия на рис. 11 изображает деформацию тела, податливость которого соответствует модели. Она не отличается от деформации, вычисленной с помощью дифференциального оператора второго порядка, также описываемого этой моделью. Такого совпадения следовало ожидать, принимая во внимание высокую точность, с которой двадцать членов ряда Фурье описывали импульс напряжения.

Пунктирная кривая на рис. 11 изображает деформацию, которая была подсчитана с помощью разложения импульса напряжений в ряд Фурье и на основании измеренных значений податливости. Различие между кривыми на рис. 11 отражает влияние различия значений податливости, приведенных на рис. 7. В результате исследования этого способа вычислений было установлено, что длительность $7T_0$ между импульсами является в данном случае чрезмерной и что основного периода $3T_0$ достаточно для

сглаживания влияния предыдущего импульса. При этом область частот сокращается в $8/3$ раз и может быть достигнуто лучшее совпадение с четырехэлементной моделью.

Эти результаты показывают, что даже для одиночного переходного импульса возможно использование сравнительно

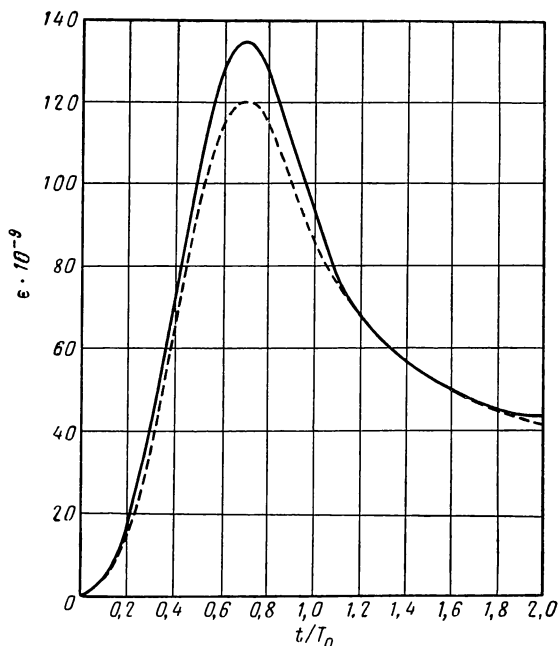


Рис. 11. Деформации материала, подверженного действию импульса напряжений, изображенного на рис. 10

— теория, --- эксперимент

узкого диапазона частот, благодаря чему может успешно применяться метод описания с помощью простого дифференциального оператора. Более того, на этой основе возможен анализ вязко-упругих напряжений для класса задач, когда контур не зависит от времени, причем решение рассматривается как конечная сумма упругих реше-

ний, основанных на использовании комплексного модуля и разложения напряжения в ряды Фурье. Для задач, где нужна более широкая полоса частот, необходимо или повышение порядка дифференциальных операторов или применение интегральных операторов, а эта область разработана значительно слабее.

5. Температурные эффекты

В рассмотренных выше задачах температура полагалась постоянной. В настоящее время разработаны теории, посвященные влиянию температуры на свойства вязко-упругих пластиков, изложенные в статьях и обзорах следующих авторов: Ферри и Фитцджеральда [44], Лидермана [7], Шварцля и Ставермана [45, 8]. По-видимому, эти теории еще не применялись в задачах анализа напряжений. Однако высказывались различные частные точки зрения, посвященные влиянию температуры на распределение вязко-упругих напряжений. Прагер [46] рассматривал температурные напряжения в вязко-упругих фермах и при помощи введения системы нормальных координат получил некоторые интересные зависимости. Если свойства материала не зависят от температуры, то температурные эффекты проявляются в термическом расширении. В пределах этих ограничений Стернберг [47], применив преобразование Лапласа, исследовал интересные свойства некоторых температурных полей. Несколько частных решений для простых вязко-упругих материалов с зависимыми от температуры константами были получены Фрейденталем [48] и Хилтоном [49]. Поскольку эти работы освещают интересные аспекты влияния вязко-упругих свойств на температурные напряжения, то для детального анализа необходимо применение теорий, основанных на непрерывных спектрах времен последействия или релаксации.

Большинство вязко-упругих материалов имеет непрерывные спектры времен последействия и релаксации, и применение дифференциальных операторов низкого порядка представляет собой грубую аппроксимацию, причем различные времена, например запаздывания в пределах некоторой области, искусственно объединяются. Как

отмечено выше, четырехэлементная модель (рис. 5), соответствующая операторам второго порядка, удовлетворительно описывает свойства полиизобутилена в пределах важной области частот (рис. 7).

Алфрей [6] подчеркивал, что такая модель (рис. 5) может рассматриваться как аппроксимация большим числом элементов Фойгта, соединенных последовательно с пружиной и амортизатором. Набор элементов Фойгта дает нам спектр времен последействия. Для частной задачи, связанной с нагружением, определенная полоса спектра времен последействия будет проявлять соответствующее вязко-упругое поведение, причем все эти группы объединяются вместе и изображаются элементом Фойгта в четырехэлементной модели. Комплексы Фойгта со значительно более длительными временами последействия в продолжение периода нагружения будут обнаруживать вязкое течение, так как при этом в процессе принимает участие лишь начальный участок цикла запаздывания (рис. 4, б). Эти элементы присоединяются к вязкому элементу модели на рис. 5. Наоборот, элементы с очень короткими временами последействия ведут себя в течение рассматриваемого промежутка времени как упругие, и при объединении дают упругий элемент (рис. 5).

Теория температурных эффектов в вязко-упругих материалах, упомянутая выше, показывает, что физический механизм отдельных процессов связан с характеристическими временами, которые уменьшаются с повышением температуры, так что для такой модели (с конечным числом элементов) различные физические механизмы будут вносить вклад в три группы элементов — пружину, элемент Фойгта и вязкий элемент. Деформации, связанные с этими механизмами, при изменении температуры могут обмениваться между этими элементами, и дело не ограничивается здесь одной только температурной зависимостью вязко-упругих констант.

Таких трудностей можно избежать, если применять непрерывные спектры, хотя механизм каждого элемента проявляется по-разному. Подобные условия порождают такие эффекты, как коробление образцов при нагревании, не изменяющих свою форму при комнатной температуре. Остаточные деформации в элементах Фойгта не исчезают

при низких температурах настолько быстро, чтобы их можно было наблюдать; повышение температуры снижает время последствия и происходит исчезновение остаточных напряжений, сопровождающееся короблением.

Легче развить теорию, основанную на непрерывных спектрах, в которой учитываются такие эффекты, чем пользоваться представлениями о переходе компонент остаточных напряжений при изменении температуры от одного элемента к другому.

6. Нелинейный анализ

В введении было отмечено, что линейный анализ представляет собой основную тему данной статьи. Намечены также пути развития этой теории, которые позволяют найти ей достаточное применение на практике. В настоящее время, по-видимому, уже разработаны основные идеи, определяющие направление работ, развитие которых в ближайшем будущем даст возможность создания законченной теории линейных вязко-упругих материалов, пригодной для решения инженерных задач. Эти методы должны найти широкое применение, хотя многие расчетные задачи требуют использования нелинейной теории.

Имеются примеры использования нелинейных законов вязко-упругости главным образом в связи с задачами, где не применяются зависимости между напряжениями, деформациями и временем в виде тензорных уравнений. Задачи о балках, которые решаются на основе сопротивления материалов, относятся к этой категории и рассматриваются в последних обширных работах, посвященных устойчивости при ползучести (см., например, обзор Хоффа [50]).

Внесен существенный вклад в дело создания общей математической теории, однако способы описания свойств различных материалов на этой основе вряд ли скоро найдут применение для решения важных технологических и расчетных задач. Ривлин и Эриксен [51] предложили теорию, использующую нелинейные дифференциальные операторы, а Грин и Ривлин [5] развивали функциональные методы, связанные с использованием наследственных интегралов. Чтобы ограничить общность проблемы, Рив-

лин [52] установил законы, в которых напряжение связано с особой формой изменения деформаций. Такой подход, ограничивающий форму уравнений, определяющих историю напряжений или деформаций и рассматриваемых теорий, дает надежду на быстрые успехи методов решения многих технологически важных задач анализа напряжений.

ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ

1. Hoskin B. C., Radok J. R. M., Brown University Rep. 3648/1, 1956.
2. Freudenthal A. M., Lorsch H. G., The infinite elastic beam on a linear viscoelastic foundation, *J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs.*, 83, 1158, (1957).
3. Hoskin B. C., Lee E. H., Brown University Rep. 3648/5, 1958.
4. Blatz P. J., Rheology of composite solid proppelants, *Industr. Engng. Chem.* 48, № 4, 727—729 (1956).
5. Green A. E., Rivlin R. S., *Arch. Ration Mech. and Analysis*, 1, 1 (1957).
6. Alfrey T., Mechanical behavior of high polymers, Interscience Publishers, New York, 1948. (Русский перевод: Алфрей Т., Механические свойства высокополимеров, ИЛ, М., 1952.)
7. Eirich F. R., Rheology, Theory and Applications. v. 2. Academic Press, New York, 1958.
8. Stuart H. A., Die Physik der hochpolymeren, v. 4, Springer, Berlin, 1956.
9. Volterra V., Theory of functionals; Blackie, London, 1930.
10. Gross B., Mathematical structure of theories of viscoelasticity, Herman, Paris, 1953.
11. Eirich F. R., Rheology. Theory and Applications, v. 1, Academic Press, New York, 1956. (Русский перевод: Эйрих Ф. (ред.), Реология, ИЛ, М., 1962.)
12. Kolsky H., Shi Y. Y., Brown University Rep., 562 (14)/5, 1958.
13. Schwarzl F., Näherungsmethod in der theorie des viscoelastischen verhaltens I, II, *Physica* 17, № 10, 923—929 (1951).
14. Leaderman H., Rheology of Polyisobutylene, p. 203—213, Proceedings of Second International Congress on Rheology — Oxford, 1953, Academic Press Inc. New York 1954.
15. Leaderman H., Approximations in linear viscoelasticity theory: Delta function approximations, *J. Appl. Phys.*, 25, № 3, 294—296 (1954). (Русский перевод: Лидерман, сб. *Механика*, № 4, 149—154 (1955).)

16. Roesler F. C., Pearson J. R., Determination of relaxation spectra from damping measurements, *Proc. Phys. Soc.*, **B67**, № 412, 338—347 (1954).
17. Roesler F. C., Some applications of fourier series in the numerical treatment of linear behavior, *Proc. Phys. Soc.*, **B68**, № 422, 89—96 (1955).
18. Benbow J. J., The determination of dynamic module and internal friction of high polymers from creep measurements, *Proc. Phys. Soc.*, **B69**, № 441, 885—893 (1956).
19. Roesler F. C., Twyman W. A., An iteration method for determination of relaxation spectra, *Proc. Phys. Soc.*, **B68**, № 422, 97—105 (1955).
20. Hopkins I. L., Hamming R. W., On creep and relaxation, *J. appl. Phys.*, **28**, № 8, 906—909 (1957).
21. Bland D. R., Lee E. H., On determination of viscoelastic model for stress analysis of plastics, *J. Appl. Mech.*, **23**, № 3, 416—420 (1956).
22. Biot M. A., Variational and lagrangian methods in viscoelasticity, p. 251—263. Deformation and flow of solids (Colloquium Madrid 1955). Ed. Grammel, Springer-Verlag, Berlin, 1956.
23. Ziegler H., *Zeitschrift für angew. Math. und Phys.*, **9** (1958).
24. Lee E. H., Stress analysis in visco-elastic bodies, *Quart. Appl. Math.*, **13**, № 2, 183—190 (1955).
25. Carslaw H. S., Jaeger J. C., Operational methods in applied mathematics, Oxford University Press, Oxford, 1953. (Русский перевод: Карслоу Х., Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948.)
26. Woodward W. B., Radok J. R. M., Stress distribution in a reinforced hollow visco-elastic cylinder. Brown University Rep. PA—TR/14, 1955.
27. Brull M. A., Proc. First Midwest Conf. Solid Mech., Urbana, p. 141, 1953.
28. MacLeod A. A., Design of plastic structures for complex static stress systems, *Industr. Engng. Chem.*, **47**, 1319—1323 (1955).
29. Read W. T., Stress analysis for compressible viscoelastic materials, *J. Appl. Phys.*, **21**, № 7, 671 (1950).
30. Bland D. R., Application of one-sided fourier transform to the stress analysis of linear visco-elastic materials, p. 156—163, Proceedings of the Conference on the Properties of Materials at High Rates of Strain, Published by the Institution of Mechanical Engineers, Westminster — London, 1957.
31. Biot M. A., Dynamic of viscoelastic anisotropic media, Proc. Second Midwest Conf. on Solid Mech., p. 94—108, 1955.

32. Mandel J., Sur les vibrations des corps viscoélastique à comportement. *Comptes Rendus des séances de L'Académie des sciences*, 245, № 25, 2176—2178 (1957). Sur les vibrations der corps elastiques, *Comptes Rendus de seances'de L'Academie des sciences*, 245, № 23, 2004—2006 (1957).
33. Volterra E., On elastic continua with hereditary characteristics, *J. Appl. Mech.*, 18, № 3, 273—279 (1951).
34. Alfrey T., Non homogeneous stresses in visco-elastic media, *Quart. Appl. Math.*, 2, № 3, 113 (1944).
35. Radok J. R. M., Visco-elastic stress analysis, *Quart. Appl. Math.*, 15, № 2, 198—202 (1957).
36. Radok J. R. M., Lee E. H., Brown University Report PATR/15, 1956.
37. Lee E. H., Radok J. R. M., Stress analysis in linearly visco-elastic materials. IX^e Congrès International De Mecanique Appliquée, v. 5, 321—329, Université De Bruxelles, 1957.
38. Adler F. T., Sawyer W. M., Ferry J. D., Propagation of transverse waves in visco-elastic media, *J. Appl. Phys.*, 20, № 11, 1036—1041 (1949).
39. Oestreicher H. L., Field and impedance of an oscillating sphere in viscoelastic medium with application to biophysics, *J. Acoust. Soc.*, 23, № 6, 707—714 (1951).
40. Bland D. R., Lee E. H., Calculation of complex modulus of linear viscoelastic materials from vibrating reed measurements, *J. Appl. Phys.*, 26, № 12, 1497—1503 (1955).
41. Lee E. H., Morrison J. A., A comparison of the propagation of longitudinal waves in rods of viscoelastic materials, *J. Polymer Sci.*, 19, № 91, 93—110 (1956).
42. Kolsky H., Propagation of stress pulses in viscoelastic solids, *Phil. Mag.*, 1, № 8, 693—709 (1956).
43. McKinney J. S., Edelman S., Marvin R. S., Apparatus for direct determination of dynamic bulk modulus, *J. Appl. Phys.*, 27, № 5, 425—436 (1956).
44. Ferry J. D., Fitzgerald E. R., Dynamic rheological properties of linear polymers, p. 140. Proceedings of Second International Congress on Rheology—Oxford, 1953, Butterworth Publ., London, 1954.
45. Schwarzl F., Staverman A. J., Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior., *J. Appl. Phys.*, 23, № 8, 838—843 (1952).
46. Prager W., Thermal stresses in viscoelastic structures, *Zeitschrift für angew. Math. und Phys.*, 7, № 3, 230 (1956).
47. Sternberg E., Transient thermal stresses in linear viscoelasticity. Proceedings of Third U. S. National Congress of Applied Mechanics. Am. Soc. Mech. Engrs. New York, 1958.
48. Freudenthal A. M., Effect of rheological behavior on thermal stresses, *J. Appl. Phys.*, 25, № 9, 1110—1117 (1954).

49. Hilton H. H., Thermal stresses in thick-walled cylinders exhibiting temperature-dependent viscoelastic properties of the Kelvin type, p. 547—553. Proceedings of Second U. S. National Congress of Applied Mechanis. Am. Soc. Mech. Engrs. New York, 1955.
50. Hoff N. J., Bucking at high Temperature, *Proc. Roy. Aer. Soc.*, 61, № 563, 756—774 (1957).
51. Rivlin R. S., Ericksen J. L., Stress-deformation relations for isotropic materials, *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, № 2, 323—425 (1955).
52. Rivlin R. S., Constitutive equations for classes of deformations, Viscoelasticity. Phenomenological Aspects, p. 93—108. Ed. Bergen J. T., Academic Press, New York—London, 1960.

Предисловие редактора перевода	5
Глава 1. Модели. Введение в основные понятия вязко-упругости	7
1. Уравнения, определяющие зависимость между силой и удлинением для простых моделей	7
2. Ползучесть и релаксация	12
3. Комплексный модуль и комплексная податливость	21
4. Накопленная и рассеянная энергии	23
5. Ползучесть и релаксация некоторых реальных материалов	24
Л и т е р а т у р а	28
Глава 2. Основы теории трехмерной линейной вязко-упругости	29
1. Гипотезы	29
2. Механика микроскопической сетки	32
3. Введение нормальных координат	36
4. Разделение общей деформации на девиатор и объемную деформацию	42
5. Лемма	47
6. Функции ползучести и релаксации	51
7. Синусоидальные колебания, комплексные модуль и податливость	56
8. Операционная форма зависимости между напряжением и деформацией	61
9. Модельное представление	65
10. Спектры запаздывания и релаксации	70
11. Краткое изложение результатов главы 2	76
Л и т е р а т у р а	77
Глава 3. Анализ напряженного состояния I. Задачи, связанные с синусоидальными колебаниями	78
1. Анализ напряженного состояния в теории вязко-упругости	78
2. Распространение синусоидальных волн в бесконечной среде	80

3. Принцип соответствия для синусоидальных колебаний	90
4. Колебания пластины	91
5. Свободные колебания сплошной сферы	94
6. Волны Рэлея	96
Литература	99
Глава 4. Анализ напряженного состояния II. Квазистатические задачи	100
1. Принцип соответствия	100
2. Расширение армированного цилиндра от внутреннего давления	103
3. Сосредоточенная сила, приложенная на границе полупространства	109
4. Сосредоточенная сила, движущаяся на границе полупространства	112
5. Другая форма принципа соответствия	113
6. Вдавливание гладкой жесткой сферы в несжимаемое полупространство	115
7. Задача устойчивости, рассмотренная Био	118
Литература	122
Глава 5. Анализ напряженного состояния III. Динамические задачи	123
1. Принцип соответствия	123
2. Распространение продольных волн вдоль полубесконечного стержня	125
3. Нормальный удар по границе сферической полости в бесконечной среде	135
4. Нормальный удар по защемленной круглой пластине	138
Литература	142
Глава 6. Модель, соответствующая измеренным значениям комплексного модуля или комплексной податливости	144
1. Содержание метода	144
2. Первый пример	151
3. Второй пример	153
Литература	157
Приложение. Напряжения в вязко-упругом теле. Е. Ли	158
1. Введение	158
2. Законы линейной вязко-упругости	164
3. Анализ напряжений	174
4. Обсуждение результатов	184
5. Температурные эффекты	191
6. Нелинейный анализ	193
Литература к приложению	149

Д. Бленд

**ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ
ВЯЗКО-УПРУГОСТИ**

Редактор *А. С. Попов*

Художник *Н. А. Усачев*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*

Технический редактор *Е. С. Потапенкова*

Корректор *К. Г. Кривда*

Сдано в производство 16/IV 1965 г.

Подписано к печати 27/VIII 1965 г.

Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32} = 3,15$ бум. л. 10,25 печ. л.

Уч.-изд. л. 8,97 Изд. № 1/2195

Цена 63 к. Зак. 1443

ИЗДАТЕЛЬСТВО «М И Р»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой

Главполиграфпрома

Государственного комитета

Совета Министров СССР по печати

Измайловский проспект, 29

63 коп.



Scan: AAW (publ.lib.ru)

Djvuing: mvk2006 (ru-board.com)

Date: 2020-03-02

Бленд, Д. Теория линейной вязко-упругости. – Москва : Мир, 1965. – 199 с. (Б-ка сборника "Механика")